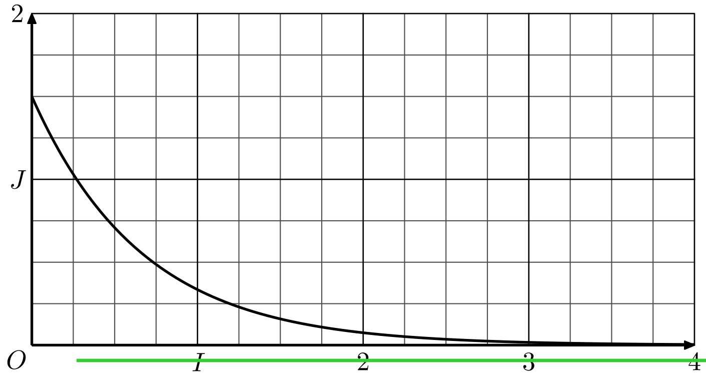
Terminale Option Complémentaire / Lois à densité

1. Loi exponentielle

E.1 Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que :

$$P(\mathcal{X}\leqslant a) = \int_0^a \lambda\cdot e^{-\lambda t}\,dt$$

La courbe donnée ci-dessous représente la fonction densité associée :



1) Interpréter sur le graphique la probabilité $P(\mathcal{X}\leqslant 1)$.

2) Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

E.2 On note $\mathcal{X}$ une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}04$.

On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'événement $(\mathcal{X}\leqslant t)$, notée $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant t)$, est donnée par :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant t) = \int_0^t \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,dx$$

Déterminer la valeur approchée de $\mathcal{P}(\mathcal{X}>5)$ à 10^{-2} près par excès.

2. Loi exponentielle et espérance

E.3 Un astronome effectue des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il modélise ensuite ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0{,}2$.

L'astronome a prévu d'observer le ciel pendant deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

3. Loi exponentielle et recherche du paramètre

E.4 On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, on a la probabilité : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant t) = \int_0^t \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,dx$

Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}>6)$ soit égale à 0,3.

4. Loi exponentielle et durée de vie sans vieillissement

E.5 Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On suppose que $n = 1000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complétement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z}\leqslant k) = \int_0^k 0{,}01\cdot e^{-0{,}01\cdot x}\,dx$$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle :

1) Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer

au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $\mathcal{P}(\mathcal{Z}\leqslant 50)$.

2. Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement : "*le joueur a tiré au maximum* 60 *boules pour tirer une boule blanche*" sachant que l'événement "*le joueur a tiré plus de* 50 *boules pour tirer une boule blanche*".

E.6 La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $\left[0\,;+\infty\right[$

On rappelle que pour tout $t>0$, la probabilité de l'événement $(\mathcal{X}\leqslant t)$ est donnée par :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant t) = \int_0^t \lambda{\cdot}\mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}\,\mathrm{d}x \quad \textit{(avec } \lambda = 0{,}07\textit{)}$$

Sans justification, indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

- **Proposition 1 :** la probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.
- **Proposition 2 :** sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.

E.7 Un restaurant fonctionne sans réservation, mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.

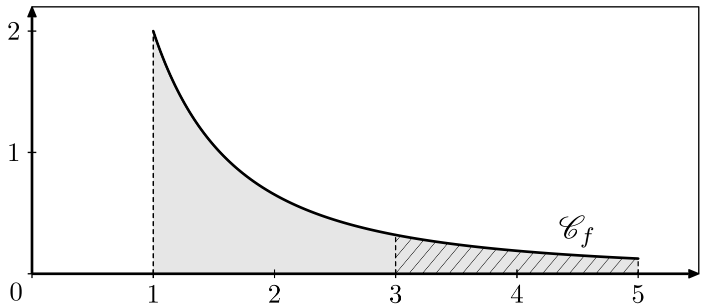
On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.
On rappelle que l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.
Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table? On arrondira à 10^{-4}.
3. Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table? On arrondira à 10^{-4}.

5. *Introduction*

E.8 On représente ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;5]$ par la relation :

$$f(x) = \frac{32}{(3x+1)^2}$$



On considère un jeu de lancer de fléchettes se basant sur la surface grisée définie par :

- l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$;
- les droites d'équations $x=1$ et $x=5$.

En supposant qu'à chaque lancer, la fléchette tombe dans cette partie grisée, on souhaite connaître la probabilité que la fléchette atteigne la zone hachurée limitée par les deux droites d'équations $x=3$ et $x=5$.

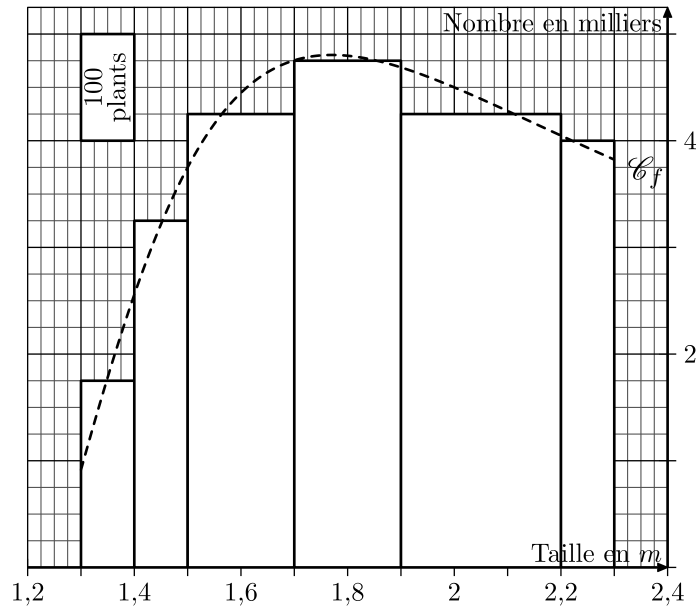
Pour cela, on considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque fléchette lancée l'abscisse de son point de réception sur la cible.

1. Déterminer la primitive de la fonction f.
2. Déterminer les valeurs des deux intégrales suivantes :
$$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$$
3. En déduire la probabilité : $\mathcal{P}\big(3\leqslant\mathcal{X}\leqslant 5\big)$

E.9

1. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire choisissant de façon équiprobable un entier dans l'intervalle $[0\,;10]$.
Déterminer la probabilité : $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}=5\big)$
2. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire choisissant de façon équiprobable un entier dans l'intervalle $[0\,;999]$.
Déterminer la probabilité : $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}=5\big)$
3. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire choisissant de façon équiprobable un réel l'intervalle $[0\,;10]$.
Déterminer la probabilité : $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}=5\big)$
4. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire choisissant de façon équiprobable un réel dans l'intervalle $\left[0\,;10\right[$.
Déterminer la probabilité : $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\in\left[0\,;5\right[\big)$

E.10 Une étude statistique porte sur la taille de plant de maïs :



Toutes les valeurs approchées demandées dans cet exercice seront approchées au centième près.

1. **A partir d'un histogramme :**

Comme indiqué par la légende de l'histogramme, on peut utiliser la graduation de l'axe des ordonnées *(nécessaire pour la courbe $\mathscr{C}_f$)* pour déterminer l'effectif associé à une barre : $0{,}1\times1\,000 = 100$ plants

Les relevés ont permis d'établir l'histogramme ci-dessus.

a. Combien de plant dont la taille est comprise entre $1{,}9\,m$ et $2{,}2\,m$ comprend cette étude?

b. En choisissant un plant au hasard parmi les plants de maïs de cette étude, quelle est la probabilité que ce plant est une taille est comprise entre $1{,}9\,m$ et $2{,}2\,m$?

2. **A partir de la courbe :**

On choisit d'utiliser une courbe représentant "grossièrement" l'histogramme. L'expression de cette fonction est :

$$f(x) = \frac{15\cdot(4\cdot x-5)}{12\cdot x^2-30\cdot x+22}$$

a. Déterminer une primitive de la fonction f.

b. Déterminer la valeur approchée de : $\displaystyle\int_{1,3}^{2,3} f(x)\,\mathrm{d}x$

On considère la variable aléatoire continue $\mathcal{X}$ qui à un plant de maïs pris au hasard dans le champ d'étude associe sa taille.

c. Déterminer la valeur approchée de la probabilité : $\mathcal{P}\big(1{,}9\leqslant\mathcal{X}\leqslant2{,}2\big)$.

d. Existe-t-il une fonction g telle que pour tout couple de réel $(a\,;b)$ vérifiant $a<b$, on ait :

$$\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Si oui, donner une expression de cette fonction?

E.11 Lors du recensement de la population de 2013, la France comptait 66 millions de personnes. Pour cet exercice, on fait la supposition *(absurde)* que les tailles *(en m)* des Français sont équitablement réparties sur l'intervalle $\big[1{,}4\,;1{,}9\big]$

On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard une personne au hasard dans la population française et on note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui retourne la taille de la personne sélectionnée.

Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}\big(1{,}4\leqslant\mathcal{X}\leqslant1{,}65\big)$ b. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant1{,}6\big)$

c. $\mathcal{P}\big(1{,}4\leqslant\mathcal{X}\leqslant1{,}9\big)$ d. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}=1{,}6783453\big)$

6. *Exemple de loi continue*

E.12 On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{40}\cdot x+\dfrac{1}{5} & \text{pour } x\in\big[0\,;4\big] \\ f(x)=0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction f définie une loi à densité sur l'intervalle $\big[0\,;4\big]$.

2. Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire définie sur $\big[0\,;4\big]$ dont la loi de probabilité a pour densité f. Déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant2)$ c. $\mathcal{P}\Big(\dfrac{1}{2}\leqslant\mathcal{X}<3\Big)$

E.13 Pour la question suivante, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer la réponse exacte ; aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie sur $\big[0\,;1\big]$ par :
$f(x)=x+m$ où m est une constante réelle.

f est une densité de probabilité sur l'intervalle $\big[0\,;1\big]$ lorsque :

a. $m=-1$ b. $m=\dfrac{1}{2}$ c. $m=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ d. $m=\mathrm{e}^{-1}$

7. *Loi uniforme*

E.14 Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée :

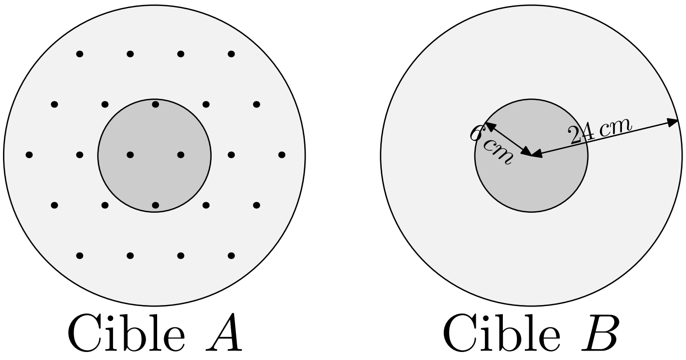
Si $\mathcal{X}$ est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\big[0\,;1\big]$, alors $\mathcal{P}\big(0{,}1\leqslant\mathcal{X}\leqslant0{,}6\big)=0{,}6$

E.15 Tout le personnel d'un hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur $\big[0\,;1\big]$.

On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20 min?

8. *Introduction aux lois continues*

E.16 On considère l'expérience aléatoire suivante qui consiste à lancer une fléchette au hasard vers une cible. Pour les besoins de la modélisation, on suppose qu'à chaque lancer, la fléchette se loge dans la cible.



1. On considère la cible A en plastique où les fléchettes en plastique touchant la cible viennent se loger dans un des trous représentés sur la figure de manière équiprobable.

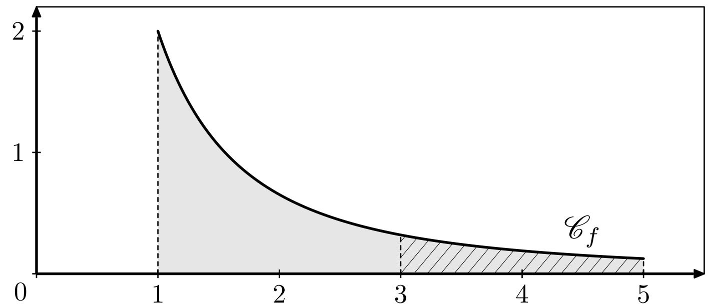
   Quelle est la probabilité que la fléchette se loge dans le rond central de la cible?

2. On considère la cible B en liège où les fléchettes munies d'une pointe d'acier peuvent se loger n'importe où sur la cible de manière équiprobable.

   Quelle est la probabilité que le tireur place la fléchette sur le rond central de la cible?

E.17 On représente ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;5]$ par la relation :

$$f(x) = \frac{32}{(3x+1)^2}$$



On considère un jeu de lancer de fléchettes se basant sur la surface grisée définie par :

- l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$;
- les droites d'équations $x=1$ et $x=5$.

En supposant qu'à chaque lancer, la fléchette au hasard tombe dans cette partie grisée, on souhaite connaître la probabilité que la fléchette atteigne la zone hachurée limitée par les deux droites $x=3$ et $x=5$.

Pour cela, on considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque fléchette lancée l'abscisse de son point de rÉception sur la cible.

1. à l'aide de la calculatrice, donner la valeur approchée au millième des intégrales ci-dessous :
   $$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$$
2. Déterminer une valeur approchée de la probabilité : $\mathcal{P}(3\leqslant\mathcal{X}\leqslant5)$

9. *Loi continue et calculatrice*

E.18 On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{40}\cdot x + \dfrac{1}{5} & \text{pour } x\in[0\,;4] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction f définit une loi à densité sur l'intervalle $[0\,;4]$. On utilisera la calculatrice pour déterminer la valeur approchée de l'intégrale :
   $$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire définie sur $[0\,;4]$ dont la loi de probabilité a pour densité f. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant2)$ c. $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\leqslant\mathcal{X}<3\right)$

10. *Loi uniforme*

E.19 Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée :

Si $\mathcal{X}$ est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;1]$, alors $\mathcal{P}(0{,}1\leqslant\mathcal{X}\leqslant0{,}6)=0{,}6$

E.20 *Parmi les quatre propositions présentées, une seule est correctes. Donner la réponse exacte.*

On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en minutes, suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;60]$

La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min.

a $\frac{1}{3}$ b 0,2 c $\frac{1}{12}$ d 0,25

11. *Loi uniforme et espérance*

E.21 *Parmi les réponses proposées, une seule est exacte. Laquelle? Justifier votre réponse.*

Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;5]$.

a L'espérance de cette loi $\mathcal{X}$ est $\frac{2}{5}$ b $\mathcal{P}(\mathcal{X}>2)=\frac{3}{5}$

c $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2)=\frac{3}{5}$ d $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5)=0$

12. *Lois uniformes et exponentielles*

E.22 La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda>0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en passe avant l'instant t est égale à :

$$P(\mathcal{X}\leqslant t)=\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}dx$$

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $P(\mathcal{X}>6)$ soit égale à 0,3.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda=0{,}2$

2. À quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $\mathrm{e}^{-0{,}4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans?
5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.
   Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

E.23 **Les parties A et B sont indépendantes**

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques, mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle $\mathcal{X}$ le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.
3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux?

Partie B

On suppose que la durée de vie $\mathcal{T}_1$ *(en heures)* de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1=5\times10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 *(en heures)* de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2=10^{-4}$ *(on pourra se reporter au formulaire ci-dessous)*

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :
   a. si ce composant est défectueux ;
   b. si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités à 10^{-2} près.
2. Soit $\mathcal{T}$ la durée de vie *(en heures)* d'un composant acheté au hasard.
   Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement

est :
$P(\mathcal{T} \geqslant t) = 0{,}02 \cdot e^{-5\times 10^{-4}t} + 0{,}98 \cdot e^{-10^{-4}t}$

(on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02)

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux?
Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire : Loi exponentielle *(ou de durée de vie sans vieillissement)* de paramètre λ sur $[0\,;+\infty[$:

- Pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $P([a\,;b]) = \int_a^b \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx$
- Pour $c \geqslant 0$, $P([c\,;+\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx$

E.24 *Cet exercice comporte **deux parties indépendantes.***
*La partie **I** est la démonstration d'un résultat de cours. La partie **II** est un Q.C.M.*

Partie I : question de cours

Soient A et B deux événements indépendants. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Partie II

Pour chacune des question suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.

*Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse enlève 0,5 point. L'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie **II** est ramenée à zéro.*

1. Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher. `(hors programme 2012)`

On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge?

a $\frac{75}{512}$ b $\frac{13}{56}$ c $\frac{15}{64}$ d $\frac{15}{28}$

2. Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population. Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25

Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe?

a $\frac{1}{120}$ b $\frac{3}{40}$ c $\frac{1}{12}$ d $\frac{4}{40}$

3. Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.

Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au gain du joueur.

Quelle est la variance de $\mathcal{X}$?

a 2 b 13 c 16 d 17

4. La durée d'attente $\mathcal{T}$, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{6}$. On a donc pour tout réel $t > 0$:
$P(\mathcal{T} < t) = \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx \quad$ *(avec $\lambda = \frac{1}{6}$)*
où t désigne le temps exprimé en minutes.

Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité *(arrondie à 10^{-4})* que son temps total soit inférieur à 5 minutes?

a 0,2819 b 0,3935 c 0,5654 d 0,6065

13. *Exercices non-classés*

E.25 On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A - Démonstration préliminaire

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.
On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$, notée $E(\mathcal{X})$, est égale à : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \int_0^x 0{,}2 \cdot t \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}\,dt$

Le but de cette partie est de démontrer que $E(\mathcal{X}) = 5$.

1. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $g(t) = 0{,}2 \cdot t \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$.
On définit la fonction G sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $G(t) = (-t-5) \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$
Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. En déduire que la valeur exacte de $E(\mathcal{X})$ est 5.

Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant :
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x \cdot e^{-0{,}2 \cdot x} = 0$

Partie C - Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1. La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0{,}2\,min^{-1}$.

   a. Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.

   b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.

2. L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :

- parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;

- parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

On choisit un client du magasin au hasard et on définit les événements suivants :

- B : "*le client paye à une borne automatique*" ;
- $\overline{B}$: "*le client paye à une caisse avec opérateur*" ;
- S : "*la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes*"

Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint?

Partie D - Bons d'achat

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10 € d'achats.
Par exemple, si le montant des achats est 58,64 €, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31 €, le client obtient 12 cartes.
Les cartes gagnantes représentent 0,5 % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 €.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il obtienne au moins une carte gagnante?

2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10 €, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 %?

