Terminale Option Complémentaire / Lois discrètes

1. Rappels : probabilités

E.1 Le tableau ci-dessous donne, d'après un échantillon de 800 personnes interrogés en 2005, un aperçu de la lecture de la presse quotidienne en France.

	Tous les jours ou presque	Une ou deux fois par semaine	Seulement pendant certaines périodes	Rarement	Jamais	Total
Agriculteurs exploitants	1	10	2	8	79	100
Artisans, commerçants, chefs d'entreprise	11	11	5	7	66	100
Cadres	17	16	10	18	39	100
Professions intermédiaires	8	15	7	15	55	100
Employés	6	7	4	9	74	100
Ouvriers (y compris agricoles)	4	5	3	5	83	100
Retraités	6	7	2	6	79	100
Autres inactifs	5	9	4	9	73	100
Total en effectif	58	80	37	77	548	800
Pourcentages du total	7,25 %	10 %	4,625 %			

Dans cet exercice, les résultats seront données sous forme décimale et éventuellement arrondis à 0,001 près.

Partie A.

1. La dernière ligne du tableau ci-dessous représente la part de chaque catégorie par rapport à l'échantillon total. Calculer les valeurs manquantes de cette dernière ligne.
2. Donner la probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi les cadres ne lise jamais.

Partie B.

On choisit au hasard une personne dans cet échantillon de 800 personnes. Dans cette partie, on note les événements suivants :

- J l'événement : "*la personne choisie ne lit jamais*" ;
- O l'événement : "*la personne choisie est un ouvrier*".

1. Calculer les probabilités des événements J et O.
2. Calculer la probabilité de l'événement $J\cap O$.
3. Calculer la probabilité de l'événement $J\cup O$

E.2 Soit $(\Omega\,;\mathcal{P})$ un espace probabilisé où A et B sont deux événements de Ω tels que :

$\mathcal{P}(A)=0{,}36 \quad ; \quad \mathcal{P}(B)=0{,}27$

1. Que peut-on dire de A et de B si $\mathcal{P}\big(A\cup B\big)=0{,}63$?
2. On suppose que : $\mathcal{P}\big(A\cup B\big)=0{,}5$:
   a. Que peut-on dire de A et de B?
   b. Quelle est la probabilité qu'un événement réalise simultanément les événements A et B?

E.3 Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province.

Une enquête est faite auprès des 1 200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport *(les seuls moyens de transport proposés sont le train, l'avion ou l'autocar)*

Les résultats de l'enquête auprès des employés de l'entreprise sont répertoriés dans le tableau suivant :

	Train	Avion	Autocar	Total
Femme	468	196	56	720
Homme	150	266	64	480
Total	618	462	120	1200

On interroge au hasard un employé de cette entreprise *(on suppose que tous les employés ont la même chance d'être interrogés)*.

F l'événement : "*l'employé est une femme*" ;

T l'événement : "*l'employé choisit le train*".

1. Calculer les probabilités $\mathcal{P}(F)$, $\mathcal{P}(T)$ puis déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train *(on donnera les résultats sous forme décimale)*
2. a. Déterminer la probabilité de l'événement $F\cap T$.
   b. En déduire la probabilité de l'événement $F\cup T$.
3. En choisissant un employé au hasard parmi les employés n'ayant pas choisi le train, quelle est la probabilité que cet employé soit une femme? *(on donnera le résultat arrondi au millième)*

2. Rappels : loi de probabilité

E.4 Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{P}\big(X=x_i\big)$	0,05	0,12	0,15	0,23	0,17	a

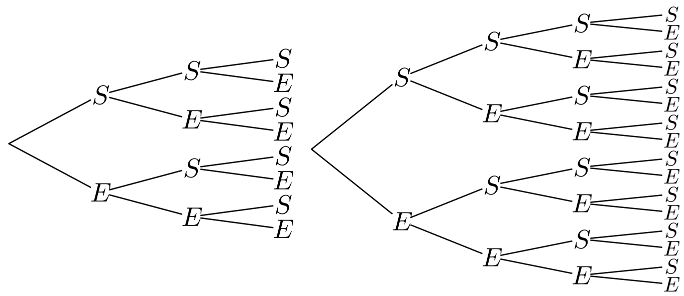
1 Déterminer la valeur de a afin que le tableau ci-dessous représente une loi de probabilité.

2 Déterminer les probabilités suivantes :

a $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 3)$ b $\mathcal{P}(\mathcal{X}<5)$

3. *Rappels : loi binomiale*

E.5 Voici les arbres de choix associés à la répétition d'une épreuve de Bernoulli respectivement 3 et 4 fois :



1 Pour la répétition trois fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3
Nombre d'issues				

2 Pour la répétition quatre fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

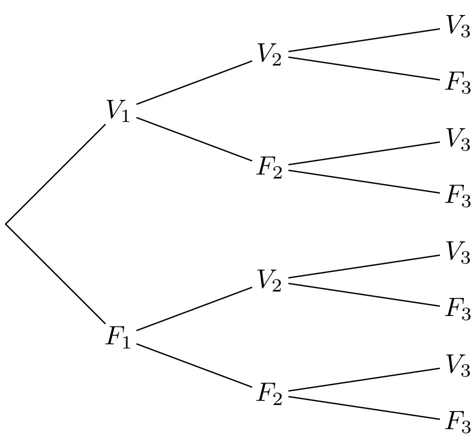
Nombre de succès	0	1	2	3	4
Nombre d'issues					

E.6 Un QCM *(questionnaire à choix multiples)* est proposé à des élèves : il comporte trois questions et pour chaque des questions, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste.

On souhaite étudier le pourcentage de réussite à ce QCM si les élèves y répondent complétement de réponse aléatoire ; on suppose alors que les réponses données à chacune des questions sont indépendantes entre elles.

On note :
- F_i : "*La réponse fournit à la question i est fausse*" ;
- V_i : "*La réponse fournit à la question i est vraie*" ;

1 Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2 On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à chaque événement élémentaire le nombre de bonnes réponses obtenues au QCM.

a Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres 3 et 0,25.

b Afin d'obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$, compléter le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$				

c Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

E.7

Rappel : pour une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre n et p, la probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur k a pour valeur :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ permet de connaître le nombre de chemin de l'arbre de chois réalisant k succès pour n répétitions.

Ci-dessus est donnée la capture de l'écran d'une calculatrice pour le calcul du coefficient binomial $\binom{5}{3}$.

1 À l'aide de la calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux ci-dessous :

a $\binom{5}{3}$ b $\binom{4}{0}$ c $\binom{4}{2}$ d $\binom{7}{5}$

2 Considérons la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}(12\,;\,0{,}3)$. Déterminer les probabilités suivantes arrondies à 10^{-4} près :

a $\mathcal{P}(\mathcal{X}=3)$ a $\mathcal{P}(\mathcal{X}=7)$

3 Considérons la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}(8\,;0{,}4)$. Déterminer les probabilités suivantes en passant par le complémentaire :

a $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 1)$ a $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 7)$

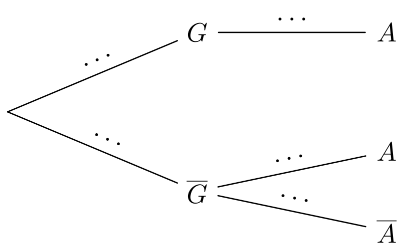
4. *Arbre non symétrique*

E.8 Une société s'est intéressée à la probabilité qu'un de ses salariés, choisi au hasard, soit absent durant une semaine donnée de l'hiver 2014.
On a évalué à 0,07 la probabilité qu'un salarié ait la grippe une semaine donnée. Si le salarié a la grippe, il est alors absent.
Si le salarié n'est pas grippé cette semaine-là, la probabilité qu'il soit absent est estimée à 0,04.

On choisit un salarié de la société au hasard et on considère les événements suivants :

- G : le salarié a la grippe une semaine donnée ;
- A : le salarié est absent une semaine donnée.

1. Reproduire et compléter l'arbre en indiquant les probabilités de chacune des branches.



2. Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'événement A est égale à 0,1072.

5. *Probabilité conditionnelle et loi binomiale*

E.9 Une grande entreprise vient de clôturer sa campagne de recrutement qui s'est déroulée en deux temps :

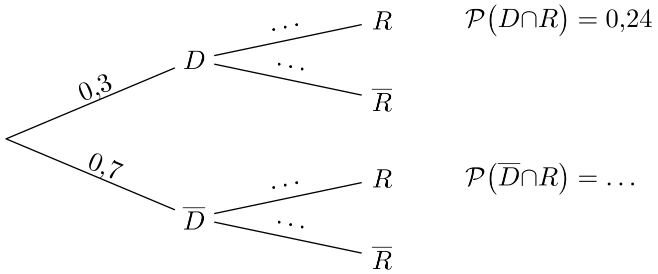
- premier temps : étude du dossier présenté par le candidat ;
- deuxième temps : entretien en vue du recrutement.

Le processus de recrutement mis en oeuvre par l'entreprise est le suivant :

- si le dossier est jugé de bonne qualité, alors le candidat est reçu en entretient par le directeur des ressources humaines ;
- si le dossier n'est pas jugé de bonne qualité, alors le candidat subit des tests puis est reçu en entretien par le directeur de l'entreprise.

Dans les deux cas, à l'issue de l'entretien, le candidat est recruté ou ne l'est pas.

En choisissant un candidat au hasard, on construit une expérience aléatoire dont l'arbre de probabilité est représenté ci-dessous avec quelques-unes des données récupérées de la publication :



où D est l'événement "*le candidat a un dossier jugé de bonne qualité*" et R l'événement "*le candidat est recruté par l'entreprise*".

1. a. Déterminer la probabilité $\mathcal{P}_D(R)$.
   b. De plus que, on sait 38 % des candidats ont été recrutés. En déduire la probabilité $\mathcal{P}_{\overline{D}}(R)$.
   c. Compléter l'arbre de probabilités.
2. Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres. On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.
   a. Justifier que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}38$.
   b. Calculer la probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée.
   On donnera la valeur exacte puis une valeur du résultat arrondie à 10^{-3}.

E.10 Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.
L'enquête révèle que 56,75 % des élèves de l'établissement sont favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

2. Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
3. Calculer la probabilité qu'exactement deux élèves soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

6. *Répétition indépendante d'expériences identiques*

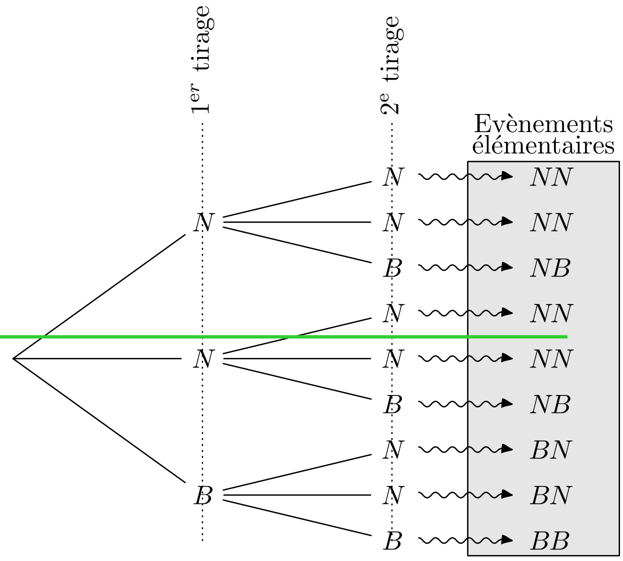
E.11 On considère une expérience aléatoire comportant deux issues : S le succès et E l'échec. Ces deux issues sont équiprobables.

On répète cette expérience 4 fois de manière indépendante. L'arbre de choix ci-dessous permet de décrire cette répétition :

1. Combien d'issues différentes comporte cette expérience aléatoire?
2. Déterminer la probabilité d'obtenir 4 succès.
3. (a) Combien d'issues représentent 3 succès?
   (b) Déterminer la probabilité d'obtenir 3 succès dans cette expérience aléatoire.

E.12 Une urne contient deux boules noires et une boule blanche ; le jeu se fait avec remise de la boule tirée : c'est-à-dire qu'une fois tirée, la boule est remise dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant.

Voici un arbre de décision basée sur le tirage de deux boules :



1. En tenant compte de l'ordre de tirage des boules, quel est le nombre possible de tirages différents?
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   (a) A : "*La première boule tirée est blanche*".
   (b) B : "*Les deux boules tirées sont de couleurs différents*".
   (c) C : "*La seconde boule est une boule noire*".
3. Donner les probabilités des événements suivants :

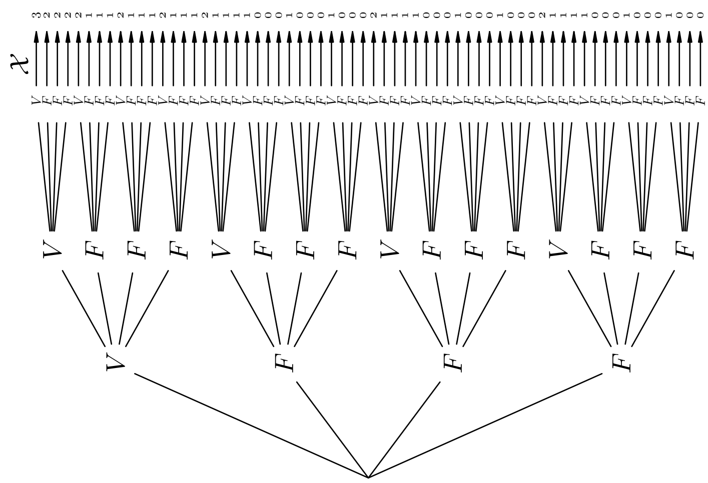
   (a) $A \cap B$ (b) $\overline{B}$ (c) $\overline{C}$

7. *Répétition indépendante d'expériences identiques et variables aléatoires*

E.13 On considère un questionnaire à choix multiple composé de 3 questions proposant chacune 4 réponses dont une seule est exacte.

On crée une expérience aléatoire en demandant aux participants de répondre au hasard aux questions proposées dans le formulaire.

On représente cette situation par l'arbre de choix ci-dessous :

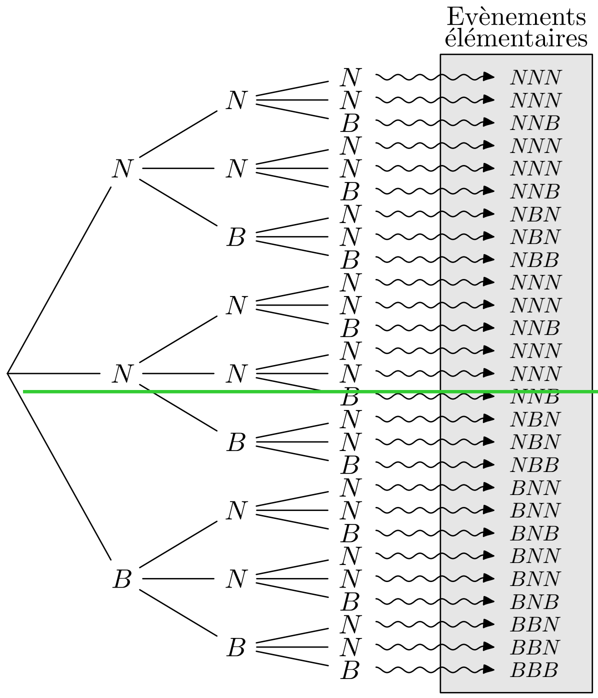


On associe à chaque événement élémentaire la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui lui associe le nombre de bonnes réponses.

Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

E.14 Dans une urne se trouve trois boules : deux boules noires et une boule blanche. On tire successivement et avec remise trois boules de cette urne.

L'arbre de choix ci-dessous illustre tous les événements élémentaires de cette expérience aléatoire :



On associe à chaque tirage un gain de la manière suivante :

- 0 € si aucune boule noire n'est tirée ;
- 1 € si on a tiré une seule boule noire ;
- 2 € si on a tiré deux boules noires ;
- 5 € si les trois boules sont noires.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque tirage le gain associé.

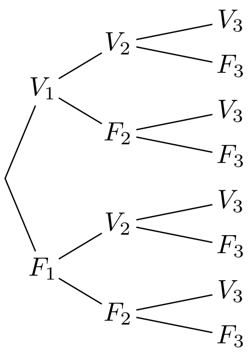
Compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	5
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$				

8. *Espérances, variances et répétition indépendante d'expériences identiques*

E.15

Un QCM *(questionnaire à choix multiples)* est proposé à des élèves : il comporte trois questions et pour chacune de ces questions, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste.
On souhaite étudier le pourcentage de réussite à ce QCM si les élèves y répondent complétement de réponse aléatoire ; on suppose alors que les réponses données à chacune des questions sont indépendantes entre elles.



On note :

- F_i : “*La réponse fournit à la question i est fausse*” ;
- V_i : “*La réponse fournit à la question i est vraie*” ;

(1) Compléter l'arbre pondéré présenté ci-dessus.

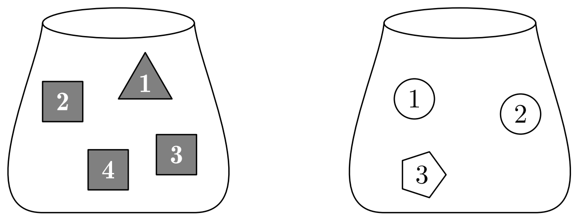
(2) On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses fournies au QCM.

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

(b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

9. *Succession indépendante d'expériences aléatoires*

E.16 On considère deux urnes A et B contenant respectivement quatre et trois objets comme représentés ci-dessous :



Urne A Urne B

Le jeu consiste à tirer un objet de l'urne A puis de l'urne B :

(1) Combien de couples d'objets différents peut-on obtenir à l'issue des deux tirages?

(2) On considère les deux événements suivants :

- C : “*Le couple d'objet comprend un carré*”
- P : “*le couple d'objet comprend un pentagone*”

Déterminer les probabilités suivantes :

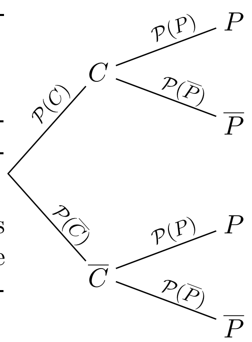
(a) $\mathcal{P}(C \cap P)$ (b) $\mathcal{P}(C \cap \overline{P})$

(c) $\mathcal{P}(\overline{C} \cap P)$ (d) $\mathcal{P}(\overline{C} \cap \overline{P})$

3 a Déterminer les deux probabilités suivantes :
$\mathcal{P}(C)$; $\mathcal{P}(P)$

b Recopier et compléter l'arbre ci-dessous avec les probabilités indiquées :

c Peut-on retrouver les résultats de la question 2 à l'aide de l'arbre de probabilité de la question précédente.



E.17 On dispose de deux urnes A et B contenant chacune des boules indiscernables au toucher. Voici la composition des urnes :

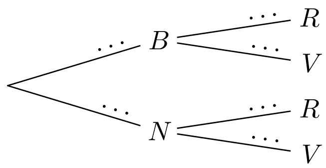
- Urne A : trois boules noires et deux boules blanches ;
- Urne B : cinq boules rouges et deux boules vertes.

On tire successivement une boule dans chacune des urnes.

On considère les événements suivants :

- B : "*la boule tirée est blanche*" ;
- N : "*la boule tirée est noire*" ;
- R : "*la boule tirée est rouge*" ;
- V : "*la boule tirée est verte*".

1 Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2 Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

a $\mathcal{P}(B\cap R)$ b $\mathcal{P}(B\cap V)$ c $\mathcal{P}(N\cap R)$

3 a Donner la valeur de : $\mathcal{P}(B\cap R)+\mathcal{P}(N\cap R)$.

b Que remarque-t-on?

E.18 Un petit restaurant propose à son menu trois plats et deux desserts. Voici la description de son menu :

• Spaguetti ...... 6 €	• Salade de fruits ... 2 €
• Filet de boeuf .. 7 €	• Crème anglaise ... 3 €
• Entrecote ...... 8 €	

Chaque client rentrant dans les restaurants prend exactement un plat et un dessert.

1 En prenant un client au hasard à la sortie du restaurant, préciser quel peut être le montant de sa facture.

2 En supposant que toutes les combinaisons plat/dessert ont la même probabilité d'être choisies par un client.

a Combien de combinaison peut-on créer à partir de ce menu?

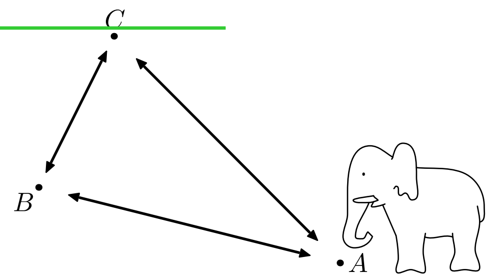
b Quelle est la probabilité pour qu'un client ait payé 8 €? 11 €?

c Montrer que la probabilité d'avoir une facture d'un montant de 10 € est de $\dfrac{1}{3}$.

d Compléter le tableau ci-dessous :

Montant de la facture	8	9	10	11
Probabilité				

E.19 Un éléphant se déplace en trois points de son territoire. Il part du point A et effectue trois déplacements :



Soit il tourne dans le sens des aiguilles d'une montre avec 2 chances sur trois sinon il se déplace dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On suppose que chacun de ses déplacements est indépendants des précédents.

Quelle est la probabilité qu'au bout de ces déplacements il arrive sur le point B?

10. *Variables aléatoires, espérances, écart-type et répétitions*

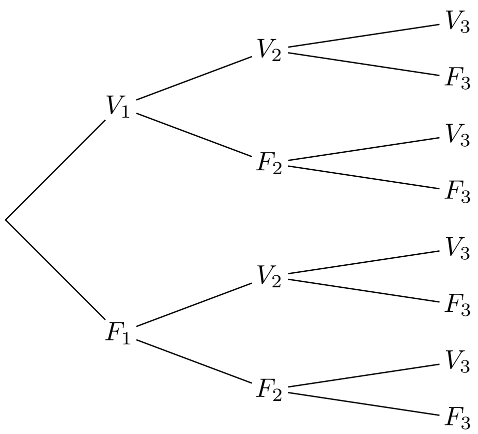
E.20 Un QCM *(questionnaire à choix multiple)* est proposé à des élèves : il comporte trois questions et quatre réponses sont proposées dont une seule est juste.

On souhaite étudier le pourcentage de réussite à ce QCM si les élèves y répondent complétement de réponse aléatoire ; on suppose alors que les réponses données à chacune des questions sont indépendantes entre elles.

On note :

- F_i : "*La réponse fournit à la question i est fausse*" ;
- V_i : "*La réponse fournit à la question i est vraie*" ;

1 Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



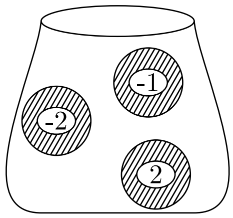
(2) On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses fournies au QCM.

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

(b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

E.21

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher portant les nombres -2, -1 et 2.
On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer successivement trois fois une boule de l'urne et en la remettant à chaque fois.



On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque expérience, la somme des nombres obtenus sur les boules tirées.

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$

Toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

E.22 Une fabrique de chocolats construit dans l'année des boîtes de chocolats dont 50 % avec du chocolat au lait, 30 % de chocolats noirs et 20 % de chocolats blancs.

70 % des boîtes présentent des chocolats natures alors que les autres boîtes contiennent des chocolats sont fourrés de caramel. Ces proportions sont indépendantes du chocolat utilisé pour confectionner la boite.

On considère les événements :

- L : "*le chocolat au lait est utilisé*" ;
- N : "*le chocolat noir est utilisé*" ;
- B : "*le chocolat blanc est utilisé*" ;
- Na : "*les chocolats sont natures*" ;
- C : "*les chocolats sont fourrés au caramel*" ;

Tous les résultats seront donnés sous forme décimale.

(1) Dresser l'arbre pondéré associé à cette situation.

(2) On choisit en sortie d'usine, au hasard, une boite produite. Déterminer les probabilités des évènemnts suivants :

(a) "*la boite contient des chocolats noir et nature*"

(b) "*la boite contient des chocolats noir ou nature*"

(3) L'entreprise fixe les prix des boîtes de la manière suivante :

- le prix de base d'une boîte de chocolat est de 9 € ;
- si le chocolat utilisé est le chocolat noir alors le prix est majoré de 4 € ;
- si le chocolat utilisé est le chocolat blanc alors le prix est majoré de 2 € ;
- si les chocolats sont fourrés au caramel, le prix de la boîte augmente de 2 €.

La variable aléatoire $\mathcal{X}$ associe à boîte produit par l'usine son prix de ventre.

(a) Dresser le tableau représentant la loi de probabilité associée à la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

(b) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ arrondi au dixième près.

E.23 Une pépinière propose trois types d'arbres : des acacias, des platanes, des chênes. Chacun de ses arbres peuvent être achetés à des tailles différentes : soit sous la forme de "*jeune pousse*" *(0,75 mètre)*, soit sous la forme "*adulte*" *(2 mètres)*.

À l'âge de jeune pousse, les acacias, platanes et chênes valent respectivement 50 €, 65 € et 80 €.
Si le client veut acheter la forme adulte, il faut alors qu'il rajoute 15 €.

Lors de son bilan de fin d'année, il remarque que 40 % des arbres vendus sont des chênes et que les acacias et platanes se partagent à parts égales les autres ventes.
Il remarque aussi que, quel que soit le type d'arbres, le quart des ventes s'effectuent toujours sur les arbres "*adultes*".

L'expérience aléatoire considérée consiste à tirer au hasard une facture de l'exercice 2015.

On considère les événements suivants :

- A : "*L'arbre acheté est un acacia*"
- P : "*L'arbre acheté est un platane*"
- C : "*L'arbre acheté est un chêne*"
- J : "*L'arbre est une jeune pousse*"

(1) Dresser un arbre pondéré représentant cette situation.

(2) On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ associant à la facture tirée son montant.

(a) Dresser le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

(b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

(c) Donner l'écart-type de $\mathcal{X}$ au dixième près.

11. Variables aléatoires, espérances, écart-type et probabilités conditionnelles

E.24 Une fabrique de chocolats produit dans l'année des boîtes de chocolat dont 50 % sont faites de chocolats au lait, 30 % de chocolat noir et 20 % de chocolat blanc.

70 % des boîtes présentent des chocolats nature alors que les autres boîtes contiennent des chocolats sont fourrés de caramel. Ces proportions sont indépendantes du chocolat utilisé pour confectionner la boite.

On considère les événements :

- L : "*le chocolat au lait est utilisé*" ;
- N : "*le chocolat noir est utilisé*" ;
- B : "*le chocolat blanc est utilisé*" ;
- Na : "*les chocolats sont natures*" ;
- C : "*les chocolats sont fourrés au caramel*" ;

Tous les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. Dresser l'arbre de probabilité associé à cette situation.
2. On choisit en sortie d'usine, au hasard, une boite produite. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   a. "*la boite contient des chocolats noir et nature*"
   b. "*la boite contient des chocolats noir ou nature*"
3. L'entreprise fixe les prix des boîtes de la manière suivante :
   - le prix de base d'une boîte de chocolat est de 9 € ;
   - si le chocolat utilisé est le chocolat noir alors le prix est majoré de 4 € ;
   - si le chocolat utilisé est le chocolat blanc alors le prix est majoré de 2 € ;
   - si les chocolats sont fourrés au caramel, le prix de la boîte augmente de 2 €.

   La variable aléatoire $\mathcal{X}$ associe à boîte produit par l'usine son prix de ventre.

   a. Dresser le tableau représentant la loi de probabilité associée à la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
   b. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

E.25 Une pépinière propose trois types d'arbres : des acacias, des platanes, des chênes. Chacun de ses arbres peuvent être achetés à des tailles différentes : soit sous la forme de "*jeune pousse*" *(0,75 mètre)*, soit sous la forme "*adulte*" *(2 mètres)*.

À l'âge de jeune pousse, les acacias, platanes et chênes valent respectivement 50 €, 65 € et 80 €.
Si le client veut acheter la forme adulte, il faut alors qu'il rajoute 15 €.

Lors de son bilan de fin d'année, il remarque que 40 % des arbres vendus sont des chênes et que les acacias et platanes se partagent à parts égales les autres ventes.
Il remarque aussi que quel que soit le type d'arbres, le quart des ventes s'effectuent toujours sur les arbres "*adultes*".

L'expérience aléatoire considérée consiste à tirer au hasard une facture de l'exercice 2015.

On considère les événements suivants :

- A : "*L'arbre acheté est un acacia*"
- P : "*L'arbre acheté est un platane*"
- C : "*L'arbre acheté est un chêne*"
- J : "*L'arbre est une jeune pousse*"

1. a. Dresser un arbre pondéré représentant cette situation.
   b. Donner la probabilité de l'événement $C \cap J$
2. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ associant à la facture tirée son montant.
   a. Dresser le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
   b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

E.26 Un producteur de fruits rouges propose en vente directe des framboises, des groseilles et des myrtilles.

Le client peut acheter, soit des barquettes de fruits à déguster, soit des barquettes de fruits à confiture.

Le producteur a remarqué que, parmi ses clients, 9 sur 10 achètent une barquette de fruits à confiture.

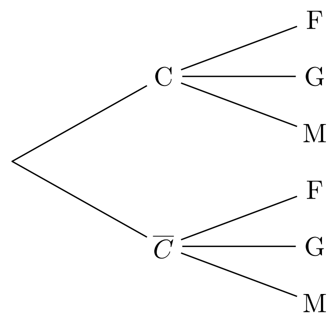
Quel que soit le type de barquette achetée, le client choisi à 50 % des cas la myrtille pour fruit, 30 % des framboises dans les autres cas, c'est la groseille qui est choisie.

On notera :

- C l'événement : "*le client achète une barquette de fruits à confiture*" ;
- F l'événement : "*le client demande des framboises*" ;
- G l'événement : "*le client demande des groseilles*" ;
- M l'événement : "*le client demande des myrtilles*" ;

On suppose que le fruit choisit ne dépend pas du type de barquette acheté et que chaque client n'achète qu'une barquette.

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



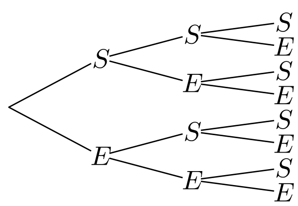
2. Déterminer la probabilité de $\overline{C} \cap F$.
3. Le producteur fixe les prix de ses barquettes de la manière suivante :
   - Le prix de base d'une barquette de fruits à confiture est vendue 5 euros et celui d'une barquette de fruits à déguster est 3 euros ;
   - Si la barquette choisie contient des framboises, il ajoute 1 euro au prix de la barquette ;
   - Si la barquette choisie contient des myrtilles, il ajoute 2 euros au prix de la barquette ;
   - Si la barquette choisie contient des groseilles, le prix de base reste inchangé.

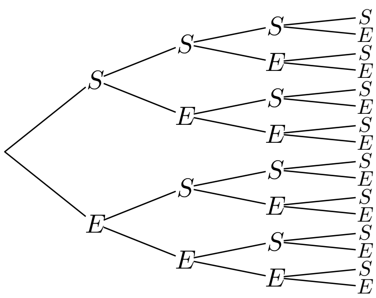
   On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associant à chaque client le prix de la barquette achetée.

   a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathcal{X}$?
   b. Dresser le tableau représentant la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.
   c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

12. *Epreuve de Bernoulli*

E.27 Voici les arbres de choix associés à la répétition d'une épreuve de Bernoulli respectivement 3 et 4 fois :





1. Pour la répétition trois fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3
Nombre d'issues				

2. a. Pour la répétition quatre fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

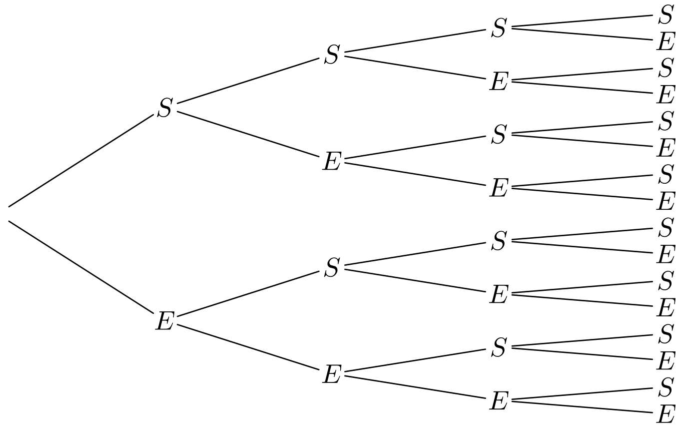
Nombre de succès	0	1	2	3	4
Nombre d'issues					

   b. Y a-t-il une méthode pour obtenir le second tableau à partir du premier?

E.28 Dans un jeu issu d'une expérience aléatoire, on ne considère que deux issues : le succès (S) à ce jeu et l'échec (E).
La probabilité du succès est de 0,15.

Partie A : répétition successive et indépendante de 4 parties

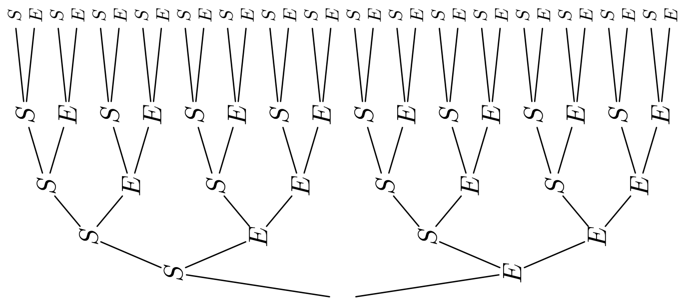
Voici l'arbre de choix correspondant à cette répétition d'expériences ;



1. Déterminer la probabilité de l'événement A :
   "*Le joueur a gagné exactement 3 fois*"
2. Déterminer la probabilité de l'événement B :
   "*Le joueur a gagné exactement 2 fois*"

Partie B : répétition successive et indépendante de 5 parties

Voici l'arbre de choix correspondant à ce jeu :



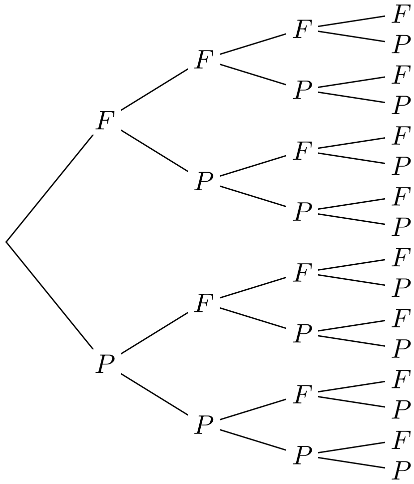
3. Déterminer la probabilité de l'événement C :
   "*Le joueur a gagné exactement 3 fois*".

E.29

1. Un joueur lance une pièce qui n'est pas équilibrée dont la probabilité d'obtenir le côté face est de 0,63.

   Quelle est la probabilité d'obtenir le côté pile?

On souhaite étudier certains événements issus de quatre lancers de cette pièce. On admet que ces lancers sont indépendants entre eux.

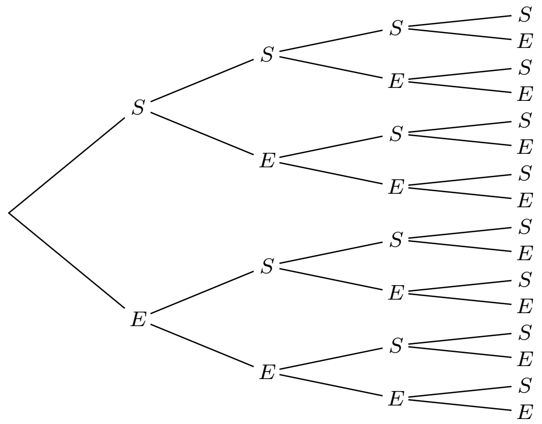


Remarque : les événements élémentaires P-P-F-P et P-F-P-P sont des issues différentes de cette expérience aléatoire mais chacune d'elles réalise le même nombre de piles et que de faces.

2. a. Combien d'issus correspondent à l'obtention de 3 côtés faces et 1 côté pile?
   b. Quelle est la probabilité d'une issue contenant 3 côtés faces et 1 côté pile?
   c. En déduire la probabilité d'obtenir 3 côtés faces au cours de ce jeu.
3. a. Parmi les calculs suivants, lequel représente la probabilité d'une issue contenant exactement 2 côtés faces :
   $(1-0{,}63)^2$; $0{,}63^3\times(1-0{,}63)$
   $0{,}63^2\times(1-0{,}63)^2$; $0{,}63\times(1-0{,}63)^3$
   b. Déterminer la probabilité d'obtenir 2 côtés faces au cours de ce jeu.

E.30

1. On considère l'arbre de choix ci-dessous issu de la répétition quatre fois d'une épreuve de Bernoulli :



Déterminer les coefficients binomiaux ci-dessous :

a $\binom{4}{2}$ b $\binom{4}{3}$

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants :

a $\binom{5}{3}$ a $\binom{12}{5}$ a $\binom{8}{6}$ a $\binom{7}{2}$

13. *Loi binomiale*

E.31 Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

Déterminer la probabilité exacte pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie, puis sa valeur arrondie au dixième.

E.32 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=0,63$.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux suivants :

   a $\binom{15}{13}$ b $\binom{15}{14}$ c $\binom{15}{15}$

2. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-4} près des probabilités suivantes :

   a $\mathcal{P}(\mathcal{X}=13)$ b $\mathcal{P}(\mathcal{X}=14)$ c $\mathcal{P}(\mathcal{X}=15)$

3. En déduire la valeur, arrondie à 10^{-4} près, de la probabilité de l'événement $\{\mathcal{X}\leqslant 12\}$.

E.33 Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n=35$ et $p=0,34$.

Déterminer la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-5} de chacune des probabilités suivantes :

a $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b $\mathcal{P}(\mathcal{X}=10)$ c $\mathcal{P}(\mathcal{X}=25)$

E.34 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=0,63$.

On donnera la probabilité exacte de chacune des probabilités demandées.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

   a $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ b $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$ c $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$

2. Donner la probabilité de l'événement $\{\mathcal{X}\geqslant 14\}$.

E.35 On suppose qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,6$

1. À l'aide de la calculatrice, dresser un tableau représentant la loi de la variable $\mathcal{X}$ avec les probabilités arrondies au millième près.

2. En déduire les probabilités suivantes arrondies au centième :

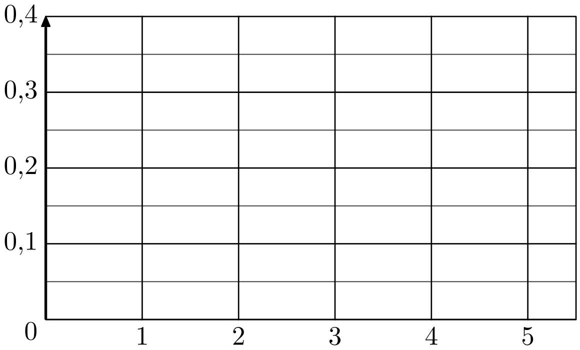
   a $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 1)$ b $\mathcal{P}(\mathcal{X}>1)$

E.36

1. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}5$.

   a. À l'aide de la calculatrice et en arrondissant les valeurs à 10^{-4}, dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

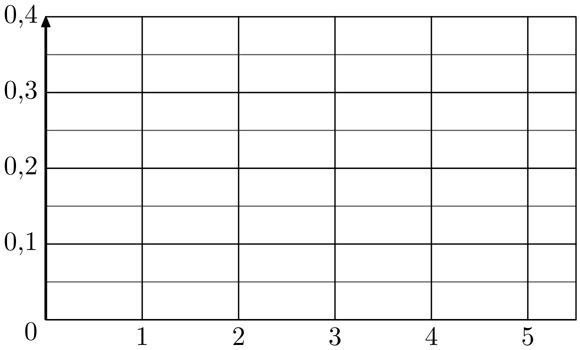
   b. Tracer le diagramme en barre représentant la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.



2. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}37$.

   a. À l'aide de la calculatrice et en arrondissant les valeurs à 10^{-4}, dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

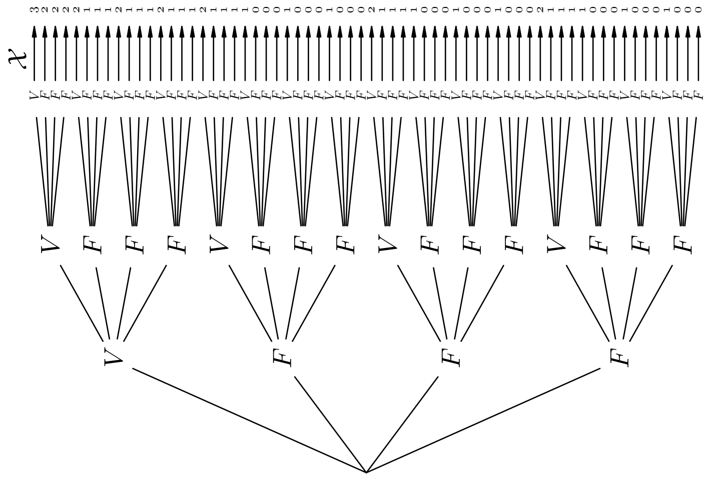
   b. Tracer le diagramme en barre représentant la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.



E.37 On considère un questionnaire à choix multiple composé de 3 questions proposant chacune 4 réponses dont une seule est exacte.

On crée une expérience aléatoire en demandant aux participants de répondre au hasard aux questions proposées dans le formulaire.

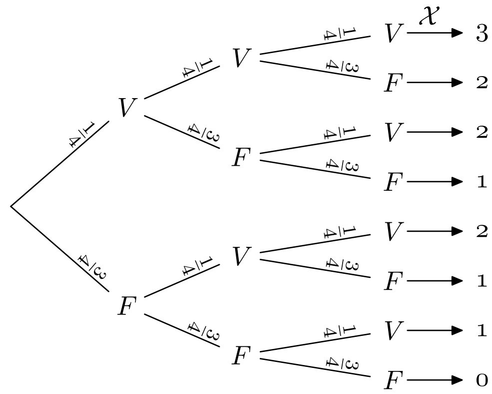
On représente cette situation par l'arbre de choix ci-dessous :



On associe à chaque événement élémentaire la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui lui associe le nombre de bonnes réponses.

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Pour chaque question du Q.C.M., la probabilité d'avoir une bonne réponse est de $\dfrac{1}{4}$ et une mauvaise réponse est de $\dfrac{3}{4}$. On simplifie l'arbre de choix par l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. a. À l'aide de cet arbre de probabilité, quel calcul permet de retrouver les valeurs des probabilités :
   $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}=0\big)$; $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}=3\big)$

   b. Quelle méthode peut-on appliquer pour obtenir rapidement les valeurs de $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}=1\big)$ et $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}=2\big)$?

E.38 Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres. On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.
On sait 38 % des candidats ont été recrutés.

1. Justifier que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}38$.

2. Calculer la probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée.
   On donnera la valeur exacte puis une valeur du résultat arrondie à 10^{-3}.

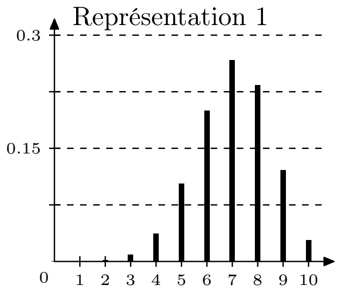
E.39 On considère une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules bleus indiscernables au toucher.

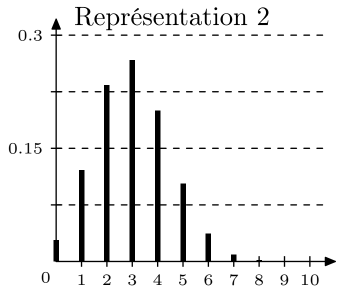
1. On tire une boule au hasard dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge?

On décide de tirer successivement trois boules. On remet à chaque fois la boule dans l'urne *(on dit que le tirage se fait avec remise)*.

2. On considère le schéma de Bernoulli issu de cette répétition où le succès est associé à l'événement "*avoir tiré une boule rouge*"
   a. Quels sont les paramètres de ce schéma de Bernoulli?
   b. Construire l'arbre représentant cette situation.
   c. Combien d'événements élémentaires réalisent l'événement :
      "*avoir tiré 2 boules rouges*"

E.40 Des deux représentations ci-dessous et sans justification, donner celle qui représente la loi d'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}3$:





E.41 On suppose qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=0{,}37$

Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}\big(3\leqslant\mathcal{X}\leqslant7\big)$ arrondie au centième près.

E.42 Un vaccin est en phase de test sur une population de 100 individus. 30 d'entre eux réagissent avec ce vaccin avec de fortes fièvres. Chaque phase de test est effectué sur un groupe de 5 individus choisis au hasard et indépendamment entre chaque test.

Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à chaque phase de test le nombre d'individus ayant eu une réaction avec de fortes fièvres.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on précisera les valeurs des paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour que 2 individus aient réagi au vaccin avec de la fièvre sur une phase de test.
3. Sur une phase de test, quelle est la probabilité qu'au moins 4 individus aient réagi avec de la fièvre.