Terminale Option Complémentaire / Suites numériques

1. Un peu plus loin : suites arithmético-géométriques

E.1 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$u_0 = 8$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5$ pour tout entier naturel n.

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
   $v_n = u_n + 10$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Montrer que la suite (v_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n :
   $$v_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot v_n$$
   b. Donner la nature de la suite (v_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.
   c. Donner la formule explicite donnant l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.
2. Déduire des questions précédentes, la formule explicite de la suite (u_n).

E.2 Soit (u_n) définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation :

$u_{n+1} = a\cdot u_n + b$ *(a et b réels non nuls tels que $a\neq 1$)*

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$

Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. Rappels

E.3

1. Les techniciens d'un aquarium souhaitent régler le distributeur automatique d'un produit visant à améliorer la qualité de l'eau dans un bassin.
   Au début du test, la concentration du produit dans ce bassin est de $160\,mg\cdot\ell^{-1}$.
   On estime que la concentration du produit baisse d'environ $10\,\%$ par semaine.

   Donner la concentration de ce produit au bout de 8 semaines.
2. Les techniciens mettent en place un distributeur automatique de telle sorte qu'il déverse chaque semaine une certaine quantité de produit. Après étude, il observe qu'avec l'utilisation de cette machine, la concentration de ce produit augmente de $5\,\%$ par semaine.

   En commençant les mesures avec une concentration de $120\,mg\cdot\ell^{-1}$, quelle sera la mesure de la concentration de ce produit au bout de 8 semaines?

Les concentrations obtenues seront arrondies au dixième près.

E.4

1. On considère la suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, géométrique de premier terme 3 et de raison 2,5.
   a. Déterminer, arrondis au millième près, la valeur des termes u_5 et u_7.
   b. Donner la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
2. On considère la suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$, géométrique de premier terme 7 et de raison 0,5.
   a. Déterminer, arrondis à 10^{-5} près, la valeur des termes v_5 et v_7.
   b. Donner la limite des termes de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Modéliser un problème

E.5 Le 1^{er} septembre 2015, un ensemble scolaire compte 3 000 élèves.
Une étude statistique interne a montré que chaque 1^{er} septembre :

- $10\,\%$ de l'effectif quitte l'établissement ;
- 250 nouveaux élèves s'inscrivent.

On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1^{er} septembre de l'année $2015+n$.

Justifier qu'on peut modéliser la situation avec la suite (u_n) telle que $u_0 = 3\,000$ et, pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = 0{,}9\cdot u_n + 250$

E.6 L'entreprise *PiscinePlus*, implanté dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.

Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, $12\,\%$ de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir.

En 2015, l'entreprise *PiscinePlus* dénombrait 75 contrats souscrits.

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise *PiscinePlus* l'année $2015+n$. Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1. Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2016.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
   $u_{n+1} = 1{,}12\cdot u_n - 6$

4. *Formule explicite*

E.7 Soit la suite (u_n) définie par $u_0=150$ et pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = 0{,}8\cdot u_n + 45$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$v_n = u_n - 225$

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
2. En déduire que pour tout entier naturel n :
   $u_n = 225 - 75\times 0{,}8^n$

E.8 On considère la suite (u_n) définie pour $u_0=27\,500$ et pour tout entier naturel n, on a :

$u_{n+1} = 1{,}04\cdot u_n - 156$

On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n. Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par :

$v_n = u_n - 3\,900$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n :
   $u_n = 23\,600\times 1{,}04^n + 3\,900$

5. *Limite*

E.9 Un loueur de voitures dispose au 1^er^ mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe.
Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1^{er} mars de chaque année, 25 % de son parc automobile et d'acheter 3 000 voitures neuves.

On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1^er^ mars de l'année $2015+n$.
On a donc : $u_0=10\,000$

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1} = 0{,}75\cdot u_n + 3000$
2. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par :
   $v_n = u_n - 12\,000$
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser son premier terme.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).
   c. Justifier que, pour tout entier naturel n :
   $u_n = 12\,000 - 2\,000\times 0{,}75^n$
   d. En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années?

E.10 Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger.

En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est 15 000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre des clients abonnés au site évolue suivant la règle suivante :
chaque mois, 10 % des clients se désabonnent et 2 500 nouveaux abonnés sont enregistrés.
On note v_n l'estimation du nombre d'abonnés n mois après l'ouverture, on a ainsi $v_0=15\,000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :
   $v_{n+1} = 0{,}9\times v_n + 2\,500$
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :
   $w_n = v_n - 25\,000$
   a. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,9 et préciser son premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier n :
   $v_n=25\,000-10\,000\times 0{,}9^n$
   c. Peut-on prévoir, à l'aide de ce modèle, une stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme? Justifier la réponse.

E.11 En 2015, les forêts couvraient environ 4 000 millions d'hectares sur terre. On estime que, chaque année, cette surface diminue de 0,4 %. Cette perte est en partie compensée par le reboisement, naturel ou volontaire, qui est estimé à 7,2 millions d'hectares par an.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0=4\,000$ et, pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = 0{,}996\times u_n + 7{,}2$

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, u_n permet d'obtenir une estimation de la surface mondiale de forêt, en millions d'hectares l'année $2015+n$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution, la variable `N` ait pour valeur la première année pour laquelle la surface totale de forêt couvre moins de 3 500 millions d'hectares sur terre.

```
N ← 2015
U ← 4 000
...
...
...
```

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
   $v_n = u_n - 1\,800$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique puis préciser son premier terme et sa raison.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n = 2200\times 0{,}996^n + 1800$
   c. Selon ce modèle et si le phénomène perdure, la surface des forêts sur terre va-t-elle finir par disparaître? Justifier la réponse.

6. *Etude d'un seuil*

E.12

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=150$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}8\cdot u_n+45$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici deux propositions d'algorithmes :

```
U ← 150
N ← 0
Tant que  U⩾220
    U ←  0,8× U+45
    N ←  N+1
Fin Tant que
```
Algorithme 1

```
U ← 150
N ← 0
Tant que  U<220
    U ←  0,8× U+45
    N ←  N+1
Fin Tant que
```
Algorithme 2

On s'intéresse, à la fin de son exécution, à la valeur de la variable N de l'algorithme.

a. Un seul de ces algorithmes permet d'affecter à la variable N, en fin d'exécution, le plus petit entier naturel n tel que $u_n\geqslant 220$.
Préciser lequel en justifiant pourquoi l'autre algorithme ne le permet pas.

b. Quelle est la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme?

7. *Résolution d'inéquations (logarithme)*

E.13 On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0=75$; $u_{n+1}=1{,}12\cdot u_n-6$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

On pose pour tout entier naturel n : $v_n=u_n-50$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n=25\times1{,}12^n+50$
3. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :
$u_n>100$.

8. *Rappels somme des termes d'une suite*

E.14 Déterminer, pour chaque question, la valeur exacte de la somme, puis le cas échéant sa valeur arrondie au centième :

a. $1+4+4^2+\cdots+4^6$

b. $1+0{,}2+0{,}2^2+\cdots+0{,}2^7$

c. $1+\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{6}\right)^2$

d. $1+1^1+1^2+\cdots+1^{10}$

E.15 On considère la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
La somme des 13 premiers termes de cette suite vaut :

Parmi les 3 réponses ci-dessous, laquelle est exacte?

a. 4095 b. 8191 c. $\dfrac{1-2^{14}}{1-2}$

E.16 Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est vraie?

La somme $S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{30}$ est égale à :

a. $-1+2^{31}$ b. $1-2^{31}$

c. $-1+2^{30}$ d. $1-2^{30}$

9. *Etude d'une seuil*

E.17

Parmi les quatre affirmations ci-dessous, une seule est exacte. Laquelle? Justifier votre réponse.

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
n ← 0
U ← 50
Tant que  U<120
    U ← 1,2× U
    n ←  n+1
Fin Tant que
```

En fin d'exécution, quelle est la valeur de la variable n :

a. 4 b. 124,416 c. 5 d. 96

E.18 Un commerçant venant d'ouvrir une boutique remarque que son chiffre d'affaires a commencé à 25 000 euros par mois et a progressé tous les mois de 2 %.

Il décide de modéliser la progression de son chiffre d'affaires par la suite (u_n) où u_0 représente le chiffre d'affaires du premier mois d'ouverture.

1. Donner la nature et les caractéristiques de la suite (u_n).
2. a. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien de mois, son chiffre d'affaires dépassera 30 000 euros.
   b. Compléter l'algorithme afin que la valeur de la variable `n` ait pour valeur, à la fin de son exécution, le nombre de mois après l'ouverture afin que son chiffre d'affaires dépassera 30 000 euros

```
n ← 0
U ← 25 000
Tant que  ... faire
    n ← ...
    U ← ...
Fin Tant que
```

10. Somme des termes d'une suite géométrique

E.19 Au 1er janvier 2017, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois 8 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion.

1. Déterminer le nombre d'adhérents au 1er mars 2017.
2. On modélise le nombre d'adhérents n mois après le 1er janvier 2017 par la suite (u_n).
   a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n).
   b. Donner l'expression du terme u_n en fonction de son rang n.
   c. Déterminer le nombre d'adhérents, arrondi à l'unité, au 1er janvier 2018.
3. Chaque adhérent verse une cotisation de 10 euros par mois. Le trésorier de l'association souhaite prévoir le montant total des cotisations pour l'année 2017.
   Le trésorier souhaite utiliser l'algorithme suivant dans lequel la quatrième ligne est incomplète *(pointillés)*.
   a. ~~Recopier et compléter l'algorithme afin qu'à la fin de~~ son exécution, la variable `S` ait pour valeur le montant total des cotisations de l'année 2017.

   S

   Pour

   b. Quelle est la somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2017?

On arrondit la somme à l'euro près.

E.20 On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Fonction f(n)
    u ← 2 000
    S ← 2 000
    Pour i allant de 2 à n
        u ← u×1,008
        S ←  S+u
    Fin pour
```

On exécute la fonction en lui fournissant pour l'argument `n` la valeur 5.

Dans le tableau ci-dessous, résumer les valeurs affectées aux variables de la fonction `f` au cours de son appel :

Valeur de `i`		2			
Valeur de `u`	2 000				
Valeur de `S`	2 000				

E.21 Sans justification, donner la valeur contenue dans la variable `S` après l'exécution de cet algorithme :

, u

pour

11. Suites géométriques, seuil et somme

E.22 Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos. La municipalité souhaite être informée sur le nombre de vélos en circulation et le coût engendré.
Le responsable du service de location de vélos constate qu'entre les vélos inutilisables, car perdus, volés ou détériorés et les nouveaux vélos acquis, le nombre de vélos utilisables augmente de 5 % chaque année.

Le 1er janvier 2017, le parc contient 200 vélos utilisables.

On modélise l'évolution du nombre de vélos utilisables par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier nature n, u_n est le nombre de vélos le 1er janvier de l'année $2017+n$.

Ainsi, $u_0=200$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 1{,}05\times u_n$.

1. a. Justifier le coefficient 1,05 dans l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
   b. Combien y aura-t-il de vélos dans ce parc au 1er janvier 2018?
2. La municipalité a décidé d'arrêter l'achat de nouveaux vélos dès que son stock dépassera 500 unités.
   En quelle année, le stock du service municipal sera supérieur à 500 vélos pour la première fois?
3. Pour l'aider à maintenir le service de location, la municipalité a obtenu une subvention de la région qui sera

versée de 2017 inclus à 2032 inclus.
Cette subvention s'élève à 10 euros par vélo disponible à la location.

En supposant que l'augmentation du stock de vélos reste constante à 5 % chaque année durant cette période, déterminer la somme totale perçue grâce à cette subvention du 1er janvier 2017 au 1er janvier 2032.
On donne la valeur exacte et la valeur arrondie au centième près.

12. *Suites géométriques : limites*

E.23 On considère la suite géométrique (u_n), de raison 0,9 et de premier terme $u_0=50$.

Pour tout entier naturel n, on note $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.
On admet que la suite (S_n) est croissante et que pour tout entier naturel n : $S_n=500-450\times0{,}9^n$.

1. Déterminer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Alex affirmer que S_n peut dépasser 500 pour une valeur de l'entier n suffisamment grande.
   Que pensez-vous de son affirmation? Justifier la réponse.

E.24 On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0=50$ et de raison 0,9.

1. Déterminer la valeur exacte du terme u_{24} et donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.
2. Pour tout entier naturel n, on note :
   $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$
   a. Déterminer la valeur exacte de la somme S_{24}. On donnera une valeur approchée du résultat à l'unité près.

   On admet que la suite (S_n) est croissante et que pour tout entier naturel n :
   $S_n = 500 - 450\times0{,}9^n$

   b. Déterminer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
   c. Alex affirme que S_n peut dépasser 500 pour une valeur de l'entier n suffisamment grande.
   Que pensez-vous de son affirmation? Justifier la réponse.

13. *Suites géométriques : limites et seuil*

E.25 On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0=0$; $u_{n+1}=0{,}8\cdot u_n+0{,}1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

1. a. Saisir l'algorithme ci-dessous :

```
u ← 0
Pour i allant de 1 à n
    u ← 0,8× u+0,1
Fin pour
```

   b. La variable n ayant pour valeur 10, que représentent les différentes valeurs de la variable u au cours de l'exécution de l'algorithme.
   c. En exécutant pas à pas l'algorithme, quelle conjecture peut-on faire sur les valeurs des termes de la suite (u_n)?

2. a. Saisir l'algorithme ci-dessous :

```
u ← 0
n ← 0
Tant que  u<0,499
    u ← 0,8× u+0,1
    n ← n+1
Fin tant que
```

   b. À la fin de l'exécution de l'algorithme, que représente la valeur de la variable n?

E.26 On note $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ la somme des n premiers termes d'une suite (u_n), n étant un entier naturel non nul. On admet que :
$S_n = -250\,000 + 250\,000\times1{,}008^n$
et que la suite (S_n) est croissante.

1. Déterminer la limite des termes de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, à partir de quel rang, la suite S_n a une valeur supérieure à 125 000.

14. *Exercices non-classés*

E.27 Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V.
Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.

On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

- u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année $2013+n$, ainsi $u_0=0{,}45$;
- v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année $2013+n$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de

sommets U et V.

2. Donner v_0, calculer u_1 et v_1.

3. On considère la fonction `f` *(incomplète)*, extrait d'un algorithme, donnée ci-dessous. Appelée avec pour argument un entier naturel n non-nul, celle-ci renvoie le couple de valeurs $(u_n\,;v_n)$.
Compléter les lignes (ℓ.3) et (ℓ.6) de la fonction pour obtenir le résultat attendu.

```
ℓ.1    Fonction f(N)
ℓ.2        U ← 0,45
ℓ.3        V ← ...
ℓ.4        Pour i allant de 1 jusqu'à N
ℓ.5            U ←  0,9× U+0,15× V
ℓ.6            V ← ...
ℓ.7        Fin Pour
ℓ.8        Renvoyer (U ; V)
```

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n :
$u_{n+1} = 0{,}75 \cdot u_n + 0{,}15$.
On note, pour tout entier naturel n : $w_n = u_n - 0{,}6$

   a. Montrer que la suite $\left(w_n\right)$ est une suite géométrique de raison 0,75.

   b. Quelle est la limite de la suite $\left(w_n\right)$? En déduire la limite de la suite $\left(u_n\right)$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.