Terminale Option Experte / Annales sur les nombres complexes

1. Algèbre

E.1 **Partie A.** Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

- Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \quad \text{à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \iff \begin{cases} z = r\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big) \\ r > 0 \end{cases}$$

- Pour tous nombres réels a et b :

$$\begin{cases} \cos\big(a+b\big) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin\big(a+b\big) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :
$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$; $\arg(z_1\cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ à 2π près.

Partie B

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $\overline{z}$ désigne le module de z :

1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{i}$, alors z^4 est un nombre réel.
2. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
3. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$.
4. Si $|z| = 1$ et si $|z+z'| = 1$, alors $z' = 0$.

E.2 Le plan (P) est muni du repère orthonormé direct $\big(O\,;I\,;J\big)$ *(unité graphique : 2 cm)*. À tout point M du plan (P) est associé le nombre complexe z, affixe du point M.

1. a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :

$$z_1 = -1 \quad ; \quad z_2 = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad z_3 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

   b. Déterminer le module et un argument de chacun des cubes ${z_1}^3$, ${z_2}^3$, ${z_3}^3$ des nombres complexes ci-dessus, puis la partie réelle et la partie imaginaire de ${z_1}^3$, de ${z_2}^3$, de ${z_3}^3$.

2. a. Si $z = x + \mathrm{i}\cdot y = \rho\cdot e^{i\theta}$ est un nombre complexe *(avec y et θ réels et ρ réels supérieur à zéro)*, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^3 en fonction de x et de y, puis le module et un argument de z^3 en fonction de ρ et θ.

   b. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z caractérisé par : z^3 est un nombre réel.

   c. Déterminer et tracer l'ensemble (E') des points M d'affixe z, caractérisé par : z^3 est un nombre réel et $1 \leqslant z^3 \leqslant 8$.

2. Géométrie sans les propriétés de l'argument

E.3 Le plan complexe est muni d'un repère $\big(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\big)$ orthonormé direct.

On note i le nombre complexe tel que : $\mathrm{i}^2 = -1$.

Soit A le point d'affixe $z_A = 1$ et B le point d'affixe $z_B = \mathrm{i}$.

À tout point M d'affixe $z_M = x + \mathrm{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe :
$z_{M'} = -\mathrm{i}\cdot z_M$

On désigne par I le milieu du segment $[AM]$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartient pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' *(propriété 1)* et que $BM' = 2\cdot OI$ *(propriété 2)*.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend : $z_M = 2\cdot e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   a. Déterminer la forme algébrique de z_M.

   b. Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$. Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.

   c. Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $\big(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\big)$ en prenant 2 *cm* pour unité graphique.
   Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$.

   a. Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

   b. Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.

   c. Écrire les coordonnées des points I, B et M'.

   d. Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.

   e. Montrer que : $BM' = 2\cdot OI$.

E.4 On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$. On prendra comme unité $2\,cm$ sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe :
$f(z)=z^2+2{\cdot}z+9$

1. Calculer l'image de $-1+\mathrm{i}{\cdot}\sqrt{3}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z)=5$.
Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation

   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation *(A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive)*.
On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z)=\lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z)=\lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $|f(z)-8|=3$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\,;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer (F) sur le graphique.
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z=x+\mathrm{i}{\cdot}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est :
$\big(x^2-y^2+2{\cdot}x+9\big)+\mathrm{i}{\cdot}\big(2{\cdot}x{\cdot}y+2{\cdot}y\big)$.
   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

E.5 On munit le plan complexe d'un repère $\big(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\big)$ orthonormé direct.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que : $|z-2|=1$

1. Justifier que $\mathscr{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit a un nombre réel. On appelle $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=a{\cdot}x$.
Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $\mathcal{D}$ en fonction des valeurs de a.

E.6 Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose :
$$\begin{cases} z = x+\mathrm{i}{\cdot}y \\ z' = x'+\mathrm{i}{\cdot}y' \end{cases} \quad \text{où } x,\ x',\ y,\ y' \text{ sont des nombres réels.}$$

On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $Re(z'{\cdot}\overline{z})=0$.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si, $Im(z'{\cdot}\overline{z})=0$.

Applications

3. N est le point d'affixe z^2-1. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux?
4. On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\dfrac{1}{z^2}-1$.
On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.
   a. Montrer que : $\Big(\dfrac{1}{z^2}-1\Big)\overline{(z^2-1)}=-\overline{z}^2{\cdot}\Big|\dfrac{1}{z^2}-1\Big|^2$.
   b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

3. *Géométrie avec argument*

E.7 *Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.*
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\big(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\big)$

1. Le point M est situé sur le cercle de centre $A(-2\,;5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :
   a. $|z-2+5{\cdot}\mathrm{i}|^2=3$;
   b. $|z+2-5{\cdot}\mathrm{i}|^2=3$;
   c. $|z-2+5{\cdot}\mathrm{i}|^2=3$.
2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC ne soit pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\dfrac{z-b}{c-a}$ et $\dfrac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.
   a. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;
   b. M appartient aux cercles de diamètres respectifs $[AC]$ et $[AB]$;
   c. M est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Soit A et B les points d'affixes respectives $1+\mathrm{i}$ et $5+4{\cdot}\mathrm{i}$,

et C un point du cercle de diamètre $[AB]$. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.

a) $|z_G - 3 - 2{,}5{\cdot}\mathrm{i}| = \dfrac{5}{6}$;

b) $z_G - (1+\mathrm{i}) = \dfrac{1}{3}{\cdot}(4+3{\cdot}\mathrm{i})$;

c) $z_G - (3+2{,}5{\cdot}\mathrm{i}) = \dfrac{1}{3}{\cdot}(4+3{\cdot}\mathrm{i})$

E.8 Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Sit le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2{\cdot}z+\overline{z}=9+\mathrm{i}$ est :

   a) 3 b) i c) $3+\mathrm{i}$

2. Soit z un nombre complexe ; $|z+\mathrm{i}|$ est égal à :

   a) $|z|+1$ b) $|z-1|$ c) $|\mathrm{i}{\cdot}\overline{z}+1|$

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+\mathrm{i}{\cdot}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

   a) $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ b) $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ c) $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

4. Soit n un entier naturel. Le complexe $\big(\sqrt{3}+\mathrm{i}\big)^n$ est un imaginaire pur si, et seulement si :

   a) $n=3$

   b) $n=6{\cdot}k+3$, avec k relatif

   c) $n=6k$ avec k relatif

5. Soit A et B deux points d'affixe respective i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-\mathrm{i}|=|z+1|$ est :

   a) La droite (AB)

   b) Le cercle de diamètre $[AB]$

   c) La droite perpendiculaire à (AB) passant par O.

6. Soit Ω le point d'affixe $1-\mathrm{i}$. L'ensemble des points M d'affixe $z=x+\mathrm{i}{\cdot}y$ vérifiant $|z-1+\mathrm{i}|=|3-4{\cdot}\mathrm{i}|$ a pour équation :

   a) $y=-x+1$

   b) $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$

   c) $z=1-\mathrm{i}+5{\cdot}e^{i\cdot\theta}$

7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3{\cdot}\mathrm{i}$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\big(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\big)=\dfrac{\pi}{2}$ est :

   a) $1-4{\cdot}\mathrm{i}$ b) $-3{\cdot}\mathrm{i}$ c) $7+4{\cdot}\mathrm{i}$

8. L'ensemble des solutions dans $\mathscr{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ est :

   a) $\{1-\mathrm{i}\}$ b) L'ensemble vide. c) $\{1-\mathrm{i}\ ;\ 1+\mathrm{i}\}$

E.9 Le plan est rapporté au repère orthonormé $\big(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\big)$. Soit $A(1\,;0)$ et $B(-1\,;0)$.

À tout point M d'affixe $z\neq0$, on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z\times z'=1$

1. a) Construire M' quand : $z=2(1+\mathrm{i})$

   b) Dans le cas général, monter que la droite (AB) est bissectrice de l'angle $\big(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}\big)$ et que :
   $OM\times OM'=OA^2$.

2. a) Vérifier que :
   $$\forall z\in\mathbb{C}^*,\quad \Big(\frac{z+z'}{2}-1\Big)\Big(\frac{z+z'}{2}+1\Big)=\Big(\frac{z-z'}{2}\Big)^2$$

   b) Soit I le milieu de $[MM']$. En utilisant a) montrer que :
   $IA\times IB=IM^2$
   et que pour $M\neq A$ et $M\neq B$ la droite (MM') est bissectrice de l'angle $\big(\overrightarrow{IA}\,;\overrightarrow{IB}\big)$

4. *Suites de complexes*

E.10 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\big(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\big)$. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0=1\quad;\quad z_{n+1}=\Big(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}{\cdot}\mathrm{i}\Big){\cdot}z_n\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On définit la suite (r_n) par :
$r_n=|z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe : $\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}{\cdot}\mathrm{i}$.

2. a) Montrer que (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

   c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère la fonction `f` d'un algorithme suivant :

```
Fonction f(p)
    r ← 1
    n ← 0
    Tant que r>p
        n ← n+1
        r ← (√3/2)R
    Fin Tant que
    Renvoyer n
```

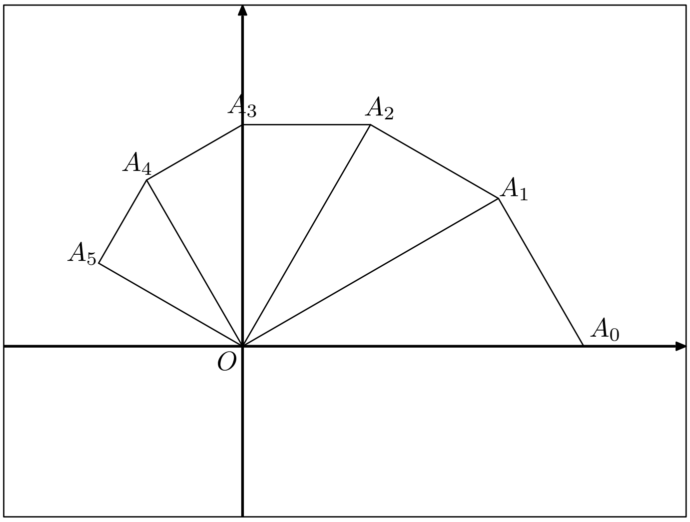
   a) Quelle est la valeur renvoyée par l'appel à la fonction `f` avec la valeur 0,5 pour l'argument `p`?

   b) Pour `p`$=0{,}01$, on obtient `n`$=33$. Quel est le rôle de cette fonction?

4 a Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

b On admet que : $z_n = r_n \cdot e^{i \cdot \frac{n\pi}{6}}$
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c Compléter la figure donnée ci-dessous en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
Les traits de construction seront apparents.



E.11 On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}$$

1 a Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

b Dans cette question, on suppose que $z_0 = i$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

c Dans cette question, on revient au cas général où z_0 est un nombre complexe donné. Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n?

Prouver cette conjecture.

2 Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1+i$.

3 Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas?

E.12 On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot i \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n. On considère le nombre complexe $z_A = 4+2 \cdot i$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = z_n - z_A$.

a Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot i \times u_n$$

b Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2} \cdot i\right)^n \cdot (-4 - 2 \cdot i)$$

2 Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

E.13 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On prendra pour unité graphique $5\,cm$.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.
On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1 Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2 Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = |z_n|$.
Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

3 À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1?

4 a Établir que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i.$$

En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.

b Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.
Exprimer ℓ_n, en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n)?

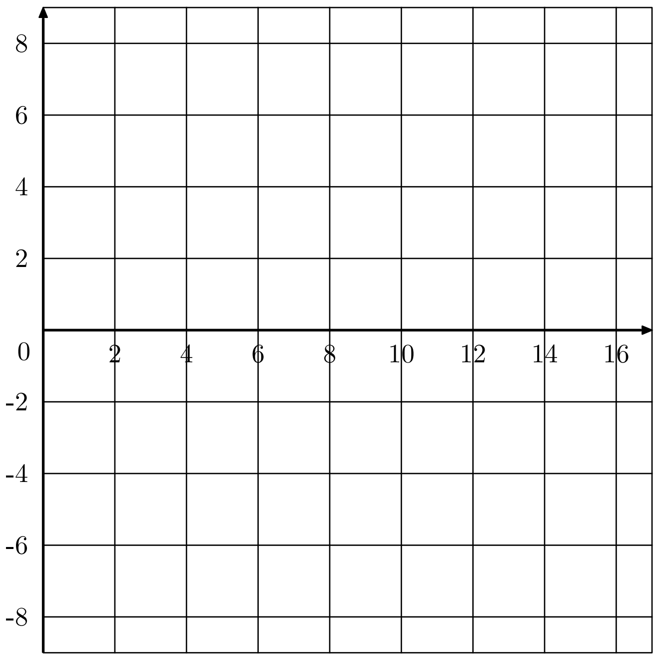
E.14 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation :

$$(E):\quad z^2 - 2\cdot z\cdot\sqrt{3} + 4 = 0$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes définie pour $n \geqslant 1$ par : $z_n = 2^n\cdot e^{i\cdot(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}}$.
   a. Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   b. Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   c. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée ci-dessous et tracer les segments $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ et $[M_3M_4]$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$z_n = 2^n\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n\cdot i}{2}\right).$$
4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $\quad M_nM_{n+1} = 2^n\cdot\sqrt{3}$.

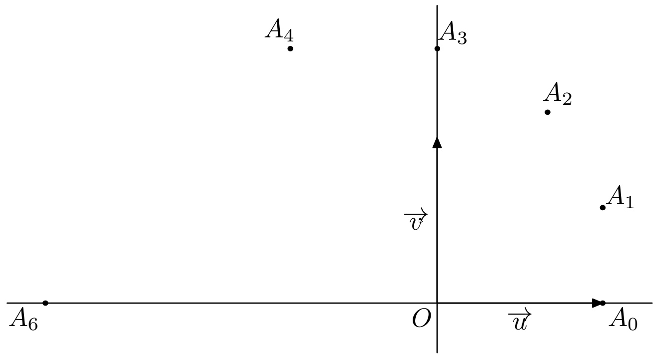
5. On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:
   $\ell_n = 2\sqrt{3}\cdot(2^n - 1)$.
   b. Déterminer la plus petit entier n tel que : $\quad \ell_n \geqslant 1000$.



E.15 On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par :

$$z_0 = 1 \quad ; \quad z_{n+1} = \left(1 + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot z_n$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ orthonormé donné ci-dessous :



L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. a. Vérifier que : $\quad 1+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$
   b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\cdot e^{i\cdot n\cdot\frac{\pi}{6}}$$
   b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés?
3. Pour tout entier naturel n, on pose : $\quad d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
   a. Interpréter géométriquement d_n.
   b. Calculer d_0.
   c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :
   $$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot(z_{n+1} - z_n).$$
   d. En déduire que la suite (d_n) est géométrique puis, que pour tout entier naturel n :
   $$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$
4. a. Montrer que pour tout entier naturel n :
   $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + {d_n}^2$
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.
   c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure ci-dessus.
   d. Justifier cette construction.

5. *Transformation du plan*

E.16 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$. On prendra pour unité graphique 1 *cm*.

1. *Question de cours*
   On rappelle que : "*Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe z, on a :*
   $|z| = \|\overrightarrow{w}\|$ *et* $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{w}\right)$".
   Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.
   a. Démontrer que : $\quad \arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}\,;\,\overrightarrow{MP}\right)$.
   b. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\frac{p-m}{n-m}\right|$.

2 On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$z_1 = 4+\mathrm{i}$; $z_B = 1+\mathrm{i}$; $z_C = 5\mathrm{i}$; $z_D = -3-\mathrm{i}$
Placer ces points sur une figure.

3 Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
$z' = (1+2\mathrm{i})z - 2 - 4\mathrm{i}$

a Préciser les images des points A et B par f.

b Montrer que f admet un unique point invariant Ω dont on précisera l'affixe ω.

4 a Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :
$z' - z = -2\mathrm{i}(2 - \mathrm{i} - z)$

b En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega}\,;\overrightarrow{MM'}\right)$.

c Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

d Soit E le point d'affixe $z_E = -1-\mathrm{i}\sqrt{3}$. Écrire z_E sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E.

E.17 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique 2 cm)*

On rappelle que pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe z, on a :
$|z| = \|\overrightarrow{w}\|$; $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{w}\right)$ à 2π près.

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : on sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :
$\arg(z{\cdot}z') = \arg(z) + arg(z')$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

Partie B

On note A et B les points d'affixes respectives $-\mathrm{i}$ et $3\mathrm{i}$.
On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distant de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = \frac{\mathrm{i}z+3}{z+\mathrm{i}}$$

1 a Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre $[AB]$.
Placer ces points sur le dessin.

b On note C le point d'affixe $c = -2+\mathrm{i}$. Démontrer que le point C', image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.

2 Pour tout point M du plan distinct de A et de B, démontrer que :
$$\arg(z') = \left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3 Étude deux ensembles de points.

a Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.

b Soit M d'affixe z un point du cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B. À quel ensemble appartient le point M'

E.18 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$, unité graphique $2\,cm$.

On appelle A le point d'affixe $-2\mathrm{i}$. À tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe :
$z' = -2{\cdot}\overline{z} + 2{\cdot}\mathrm{i}$

1 On considère le point B d'affixe $b = 3-2{\cdot}\mathrm{i}$.
Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur le dessin.

2 Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ).

3 Démontrer que pour tout point M d'affixe z, on a :
$|z' + 2{\cdot}i| = 2{\cdot}|z + 2{\cdot}\mathrm{i}|$

E.19 Soit $\mathscr{P}$ le plan complexe rapporté au repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique 4 cm)*. Soit A le point d'affixe 1. On note f l'application de $\mathscr{P}$ privé de A dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = \frac{1}{z-1}$$

1 a Soit B le point d'affixe $b = 4+\mathrm{i}\sqrt{3}$. Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle de l'affixe b' de B'.

b Déterminer les affixes des points ayant pour image par f leur symétrique par rapport à O.

2 a Exprimer $|z'|$ et $\arg(z')$ en fonction de $|z-1|$ et $\arg(z-1)$.

b Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon r. On suppose que M est un point de $\mathscr{C}$. Déterminer $|z'|$.
En déduire que M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

c Placer un point M quelconque sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$ et construire son image M'. *(on laissera les traits de construction)*.

E.20 Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique $4\,cm$, on considère le point A d'affixe $A=-1$ et l'application f, du plan $(\mathcal{P})$ dans lui-même, qui au point M, d'affixe z distinct de A, associe le point $M'=f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}\cdot z}{z+1}$$

1. Déterminer l'affixe des points M tels que $M'=M$.
2. Démontrer que pour tout point M distinct de A et de O, on a :
$$OM' = \frac{OM}{AM}$$
$$\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près}$$
3. a. Soit B le point d'affixe $b=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}$.
Placer dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment $[OA]$.
   b. Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B' image du point B par f.
Établir que B' appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.
Placer le point B' et tracer le cercle $(\mathscr{C})$ dans le repère.
   c. En utilisant la question 2, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle $(\mathscr{C})$.
   d. Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.
En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f *(On laissera apparents les traits de construction)*.
4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.

Les questions a et b peuvent être traitées de façon indépendante.

   a. On pose $z=x+\mathrm{i}\cdot y$ avec x et y réels tels que :
$(x\,;y) \neq (-1\,;0)$; $(x\,;y) \neq (0\,;0)$
Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à :
$$Im(z') = \frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$$
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer dans le repère.
   b. À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).

6. *Exercices non-classés*

E.21

1. Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes $1+i$ et $1-i$.
2. Pour tout entier naturel n, on a pose :
$S_n = \left(1+i\right)^n + \left(1-i\right)^n$
   a. Déterminer la forme trigonométrique de S_n.
   b. *Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifié ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée*
      - **Affirmation A :** Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.
      - **Affirmation B :** Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n=0$.

E.22 Asie Juin 2018

E.23 Antilles guyanes septembre 2018

E.24 *Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*
Chaque réponse exacte rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 *point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.*

1. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$. On a alors :

   a. $z^{14} = -128\cdot\sqrt{3} - 128\cdot\mathrm{i}$
   b. $z^{14} = 64 - 64\cdot\mathrm{i}$
   c. $z^{14} = -64 + 64\cdot\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$
   d. $z^{14} = -128 + 128\cdot\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe 4i. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
$\left|z-3\right| = \left|3-4\mathrm{i}\right|$.
   a. (E) est la médiatrice du segment $[ST]$;
   b. (E) est la droite (ST) ;
   c. (E) est le cercle de centre Ω d'affixe $3-4\mathrm{i}$ et de rayon 3 ;
   d. (E) est le cercle de centre S et de rayon 5
3. On considère un hexagone régulier $ABCDEF$, dont les côtés sont de longueur 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CF}$ est égal à :

   a. $\sqrt{3}$ b. -3 c. $-\sqrt{3}$ d. $\frac{3}{2}$

4. Une fonction g est définie sur l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right]$ par

$g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}$; soit Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- a) Γ admet une asymptote d'équation $y=-1$.
- b) Γ n'admet pas d'asymptote.
- c) Γ admet une asymptote d'équation $y=x$.
- d) Γ admet une asymptote d'équation $y=1$.

5) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$. La fonction f'', dérivée seconde de la fonction f sur $\mathbb{R}$, est définie par :

- a) $f''(x)=\displaystyle\int_0^x -2t\cdot\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
- b) $f''(x)=\displaystyle\int_0^x -2x\cdot\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
- c) $f''(x)=-2x\cdot\mathrm{e}^{-x^2}$
- d) $f''(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$

E.25 *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.*

1) Soit $z_1=\sqrt{6}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=\sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $\mathrm{i}\cdot\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

- a) $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$
- b) $\sqrt{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$
- c) $\sqrt{3}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$
- d) $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

2) L'équation $-z=\overline{z}$, d'inconnue complexe z, admet :

- a) une solution
- b) deux solutions
- c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.
- d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

3) Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A\,(1;2;3)$, $B\,(-1;5;4)$ et $C\,(-1;0;4)$. La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

- a) $\begin{cases} x=-2t-1\\ y=3t\\ z=t+4\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$
- b) $\begin{cases} x=-1\\ y=7t\\ z=7t+4\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$
- c) $\begin{cases} x=-1-2t\\ y=5+3t\\ z=4+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$
- d) $\begin{cases} x=2t\\ y=-3t\\ z=-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

4) Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $D\,(-1;2;3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(3;-5;1)$, et la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=t-7\\ y=t+3\\ z=2t+5\end{cases},\quad \text{pour tout } t\in\mathbb{R}$$

- a) La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
- b) La droite Δ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathcal{P}$.
- c) La droite Δ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.
- d) La droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

E.26 *Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.*
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1 et 2, le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$. On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a=2+2\mathrm{i}\quad;\quad b=-\sqrt{3}+\mathrm{i}\quad;\quad c=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$$

$$d=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\quad;\quad e=-1+\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}$$

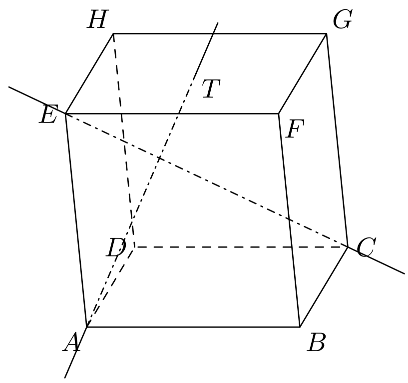
1) **Affirmation 1 :** les points A, B et C sont alignés.

2) **Affirmation 2 :** les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

3) Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$.
On considère les points :
$(1;0;0)\quad;\quad J\,(0;1;0)\quad;\quad K\,(0;0;1)$

Affirmation 3 : la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=2-t\\ y=6-2t\\ z=-2+t\end{cases}\quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$
coupe le plan (IJK) au point $E\left(-\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$

4) Dans le cube $ABCDEFGH$, le point T est le milieu du segment $[HF]$.



Affirmation 4 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.