1. Exercices non-classés

E.1 *Rappel :*
Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \pmod{7}$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances :*
   a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
   Démontrer que :
   Si $a \equiv b \pmod{7}$ et $c \equiv d \pmod{7}$
   alors $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{7}$.
   b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls. Si $a \equiv b \pmod{7}$ alors pour tout entier naturel n :
   $a^n \equiv b^n \pmod{7}$.
2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que : $a^n \equiv 1 \pmod{7}$.
3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$.
   b. On appelle *ordre* de $a \pmod{7}$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod{7}$.
   Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \pmod{7}$.
   En déduire que k divise 6.
   Quelles sont les valeurs possibles de k?
   c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.
4. À tout entier naturel n, on associe le nombre :
   $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
   Montrer que : $A_{2006} \equiv 6 \pmod{7}$

E.2 Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que :
$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$

Partie A : Etude de deux cas particuliers

1. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la question précédente.
2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.
   a. Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

   b. Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que :
   $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \pmod{8}$?

Partie B : Etude du cas général où $n \geqslant 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que :
$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors :
   $x = 2q \quad ; \quad y = 2r \quad ; \quad z = 2s + 1$
   où q, r, s sont des entiers naturels.
   a. Montrer que : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod{4}$.
   b. En déduire une contradiction.
3. On suppose que x, y, z sont impairs.
   a. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.
   b. En déduire que : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod{8}$.
   c. Conclure.

E.3

1. a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

   b. Démontrer alors que : $(2005)^{2005} \equiv 7 \pmod{9}$.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1 \pmod{9}$.

   b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante :
   $N \equiv S \pmod{9}$.

   c. En déduire que N est divisible par 9 si, et seulement si, S est divisible par 9.

3. On suppose que $A=(2005)^{2005}$; on désigne par :
   - B la somme des chiffres de A ;
   - C la somme des chiffres de B ;
   - D la somme des chiffres de C.

   a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D \pmod{9}$.

   b. Sachant que $2005 < 10000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que : $B \leqslant 72180$.

   c. Démontrer que : $C \leqslant 45$.

   d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

   e. Démontrer que : $D=7$.

E.4 Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. a. Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

   b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6}-3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.

   c. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.

   d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque?

   e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2. Soit $U_n = 1+3+3^2+\cdots+3^{n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   a. Montrer que si U_n est divisible par 7 alors 3^n-1 est divisible par 7.

   b. Réciproquement, montrer que si 3^n-1 est divisible par 7 alors U_n est divisible par 7.
   En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisibles par 7.

E.5 On se propose de déterminer les couples $(n\,;m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :
$7^n - 3\times 2^m = 1 \quad (F)$

1. On suppose $m \leqslant 4$.
   Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.

   a. Montrer que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors :
   $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.

   b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

   c. En déduire que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors :
   $7^n \equiv 1 \pmod{5}$

   d. Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples $(n\,;m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F)?

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

E.6

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 *(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence)*.
   En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier :
   $Q_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$

   a. Si $p=3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7?

   b. Démontrer que si $p=3n+1$ alors A_p est divisible par 7.

   c. Étudier le cas où $p=3n+2$

4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :
   $a = \overline{1\,001\,001\,000} \quad ; \quad b = \overline{1\,000\,100\,010\,000}$

   Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p. Sont-ils divisibles par 7?