Terminale Option Experte / Annales sur l'arithmétiques

1. Exercices non-classés

E.1 Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \pmod{10\,000}$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.
2. En déduire que : $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \pmod{16}$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2\,009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = (u_n+1)^5 - 1$.

1. a. Démontrer que u_0 est divisible par 5.
   b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = u_n \cdot \left[u_n^4 + 5\cdot\left(u_n^3 + 2\cdot u_n^2 + 2\cdot u_n + 1\right)\right]$$
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.
2. a. Vérifier que $u_3 = 2\,009^{250} - 1$ puis en déduire que $2\,009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$.
   b. Démontrer alors que : $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \pmod{625}$

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que :
   $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ est divisible par $10\,000$.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

E.2 Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit : $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$.
Déterminer les paires $\{a\,;b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1. L'entier $(n-1)!$ est-il pair?
2. L'entier $(n-1)!+1$ est-il divisible par un entier naturel pair?
3. Prouver que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisible par 15.
4. L'entier $(11-1)!+1$ est-il divisible par 11?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier $(p \geqslant 2)$.

1. Prouver que p admet un diviseur q $(1 < q < p)$ qui divise $(p-1)!$
2. L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?
3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

E.3

1. On considère l'ensemble : $A_7 = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$
   a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que :
   $a\cdot y \equiv 1 \pmod{7}$.

a	1	2	3	4	5	6
y						6

   b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3\cdot x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.
   c. Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a\cdot x \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.
2. Dans toute cette question, p est un entier premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p = \{1\,;2\,;\ldots\,;p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.
   a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation :
   $a\cdot x \equiv 1 \pmod{p}$.
   b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation $a\cdot x \equiv 1 \pmod{p}$.
   c. Soit x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $x\cdot y \equiv 0 \pmod{p}$ si, et seulement si, x est un multiple de p ou y est un multiple de p.
   d. Application : $p = 31$.
   Résoudre dans A_{31} les équations :
   $2x \equiv 1 \pmod{31}$; $3x \equiv 1 \pmod{31}$
   À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$.

 CC BY-NC