Terminale Option Experte / Arithmétique et divisibilité

1. Decomposition en produit de facteurs premiers

E.1

1. Citer les nombres premiers inférieurs ou égaux à 20.
2. Déterminer les décompositions en produit de facteurs premiers les nombres suivants : 126 ; 588 ; 5040
3. En déduire les décompositions en produit de facteurs premiers des nombres suivants : $\dfrac{5040}{126}$; $126+588$

E.2 ⚠ k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

2. Parité

E.3

1. Compléter intuitivement les deux tableaux à double entrée suivants :

$+$	Pair	Impair
Pair		
Impair		

$\times$	Pair	Impair
Pair		
Impair		

2. En remarquant les deux caractérisations suivantes :
   - Si $n\in\mathbb{Z}$ est pair, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $n = 2{\cdot}k$
   - Si $n\in\mathbb{Z}$ est impair, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $n = 2{\cdot}k + 1$

   Répondre aux questions suivantes :

   a. Démontrer que la somme de deux entiers impairs est pair.

   b. Démontrer que le produit de deux entiers impairs est impair.

E.4 On considère l'expression $B=n^2-1$ pour $n\in\mathbb{N}^*$:

1. Démontrer que pour n pair, B est impair.
2. Démontrer que pour n un entier impair strictement supérieur à 1, B est pair et divisible par 8.

E.5 Soient p et q deux entiers naturels. Étudions la relation :
$p^2 - 2{\cdot}q^2 = 1$

1. Trouver deux entiers p et q vérifiant la relation précédente et telle que :
   $1 \leqslant p \leqslant 4$; $1 \leqslant q \leqslant 4$
2. On suppose que les entiers p et q vérifient la relation recherchée :

   a. Démontrer que l'entier p est impair.

   b. En déduire que l'entier q est pair.

3. Quelques problèmes d'arithmétique

E.6 Déterminer la somme de tous les multiples de 11 compris entre 100 et 400. *(on pourra utiliser une suite arithmétique)*

E.7 Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3.

E.8

1. Pour k un entier naturel non-nul développer l'expression : $A=\left(2{\cdot}k+1\right)^2-1$.
2. Justifier que A est un multiple de 8.

4. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

E.9

1. Parmi les égalités proposées, laquelle représente la division euclidienne de -25 par 3 :

   a. $-25 = (-9)\times3 + 2$ b. $-25 = (-8)\times3 + (-1)$

2. Déterminer les divisions euclidiennes des nombres suivants par 4 :   a. -31 b. -19

5. *Division euclidienne*

E.10 De l'égalité : $456\,164=65\,164\times7+16$, en déduire la division euclidienne de $456\,164$ par 7.

E.11

On considère la fonction `f` extrait d'un algorithme dont l'appel s'effectue en lui passant en argument deux entiers naturels `a` et `b` :

```
Fonction f(a,b)
    c ← 0
    Tant que  a>b
        c ←  c+1
        a ←  a−b
    Fin Tant que
    Renvoyer (c;a)
```

1. Donner le couple renvoyé par la fonction `f` lorsqu'elle est appelée avec les arguments `a`$=13$ et `b`$=4$. Dans une exécution pas à pas de l'appel à la fonction f, on indiquera les valeurs des variables `a`, `b`, `c` au cours de cet appel.
2. Que représente le couple renvoyé lors de l'appel à la fonction `ff` ?

6. *Opération sur la division euclidienne*

E.12

1. Déterminer la division euclidienne de $1\,038$ par 17.
2. En étudiant le carré $(61\times17+1)^2$, déterminer le reste de la division euclidienne de $1\,038^2$ par 17.
3. En déduire une conjecture sur le reste, pour tout entier naturel n, la division euclidienne de $1\,038^n$ par 17.

E.13 Soit n un entier relatif. On considère les deux propriétés suivantes :

- $\mathcal{P}$ "*le reste de la division euclidienne de n par 5 vaut 1*"
- $\mathcal{P}'$ "*le reste de la division euclidienne de n par 4 vaut 3*"

1. a. Soit n un entier naturel vérifiant la propriété $\mathcal{P}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $n-11$ par 5.
   b. Soit n un entier naturel vérifiant la propriété $\mathcal{P}'$. Justifier que l'entier $n-11$ est un multiple de 4.
2. Sans justification, donner trois entiers vérifiant les deux propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

7. *Diviseur et multiple*

E.14 α et β représentent deux entiers ; on considère les quatre phrases suivantes :

1. α est un multiple de β
2. α a pour multiple β
3. α est un diviseur β
4. α a pour diviseur β

Les phrases ci-dessus sont équivalentes deux à deux ; retrouver les phrases équivalentes.

E.15

1. a. Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^2 par 3.
   b. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier n naturel, le reste de 10^n par la division euclidienne par 3 vaut 1.
2. Justifier que l'entier $4\times10^n-1$ est, pour tout entier naturel n, divisible par 3.

E.16 Pour tout entier naturel n, on pose : $A(n)=n^2-n+2007$.
Le but de l'exercice est d'étudier la divisibilité des entiers $A(n)$ par 2 et par 3.

Cet exercice est composé de deux questions indépendantes.

1. a. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier $A(1)$ égal à 2007.
   b. Soit n un entier naturel. Démontrer que : "*Si n est divisible par 3, alors $A(n)$ est divisible par 3*".
   c. La réciproque de cette dernière affirmation est-elle vraie ? Justifier.
2. a. Vérifier que, quel que soit l'entier naturel n, on a :
   $(n+1)^2-(n+1)+2007=(n^2-n+2007)+2\cdot n$
   b. On considère un entier naturel n quelconque. Démontrer que : "*Si $A(n)$ est impair, alors $A(n+1)$ est impair*".
   c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
   "*Il existe au moins un entier naturel n tel que $A(n)$ soit divisible par 2*".

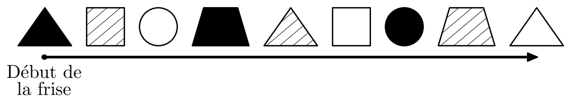
E.17 Pour tout entier relatif n, on considère l'entier A_n défini par :
$A_n=2n^2+2n+8$

Justifier que l'entier A_n est divisible par 4 pour tout entier relatif $n\in\mathbb{Z}$

8. *Problème et reste de la division euclidienne*

E.18 Une frise est constituée de carrés, triangles, cercles et trapèzes se succédant régulièrement. Ces éléments sont successivement peints en blanc, avec des rayures ou en noir.

Le début de la frise est représenté ci-dessous :



1. Donner les caractéristiques du $113^{\text{ième}}$ élément de cette frise.
2. Quel est l'élément suivant le $113^{\text{ième}}$ élément et ayant les mêmes caractéristiques?

E.19 Un système de codage permet de transformer toute lettre d'un texte en un autre rendant ainsi le texte illisible.

Pour cela, il numérote les lettres de l'alphabet en commençant par 0. Une transformation sur l'entier permet alors de changer la lettre.

Voici le tableau de correspondance de ce codage :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	[redacted]	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	F	I	L	O	R	U	X	A	D	G															

Quelle transformation a été utilisée sur les entiers?

9. *Manipulation du reste de la division euclidienne*

E.20 Dans cet exercice, on s'intéresse à la division euclidienne par 4 et plus particulièrement au reste de la division par 4 :

1. Soit x et y deux nombres entiers dont le reste par la division euclidienne par 4 vaut respectivement 2 et 3.
   a. Donner une expression caractérisant la division euclidienne de x par 4 ainsi que pour la division euclidienne de y par 4.
   b. Établir que le reste de la division $(x+y)$ par 4 vaut 1.
   c. Établir que le reste de la division $x{\cdot}y$ par 4 vaut 2
2. Soit x et y deux nombres entiers ; on note r_x et r_y les restes de la division respectivement de x et de y par 4.

   On considère les deux tableaux ci-dessous :

r_y \ r_x	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

r_{x+y}

r_y \ r_x	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

$r_{x\cdot y}$

   On note r_{x+y} et $r_{x\cdot y}$ les restes respectifs par la division par 4 des entiers $(x+y)$ et $(x{\cdot}y)$.
   a. Inscrire dans ces deux tableaux, les résultats obtenus à la question 1.
   b. Compléter de manière "*intuitive*" ces deux tableaux.

E.21 On donne la division euclidienne de 195 695 par 3 :

$$195\,695 = 65\,231\times3+2$$

1. Justifier que le reste de la division euclidienne de $(195\,695\times2)$ par 3 est 1.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(195\,695\times3)$ par 3.
3. On note r_n le reste de la division euclidienne de $(195\,695\times n)$ par 3. Compléter de tête le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
r_n							

E.22 On donne les deux divisions euclidiennes par 5 suivantes :

$$5474 = 1094\times5+4 \quad ; \quad 5487 = 1097\times5+2$$

Sans utiliser la calculatrice et sans calculer de produit, montrer que l'entier 5474^2+5487^2 est divisible par 5.

Votre démarche doit être entièrement présente sur votre copie.

10. *Raisonnement exhaustif*

E.23 Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels vérifiant l'égalité :

$$a^2-b^2=21$$

E.24 Soit a et b deux entiers naturels.

1. Démontrer que :
   $a^2{\cdot}b-a{\cdot}b^2=9 \implies a{\cdot}b$ divise 9 et $a-b$ divise 9.
2. En déduire les couples de solutions $(a\,;b)$ tels que :
   $a^2{\cdot}b-a{\cdot}b^2=9$.

E.25 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le quotient de la division euclidienne de n par 5 soit égal au reste par la même division.

E.26 On considère l'entier B défini par :

$B = (2{\cdot}m+3){\cdot}(2{\cdot}n)$ où $m, n \in \mathbb{N}$

Déterminer l'ensemble des couples $(m\,;n)$ d'entiers vérifiant la relation $B=70$.

E.27 Déterminer, si elles existent, les valeurs de $n\in\mathbb{Z}$ afin que la fraction $\dfrac{6n+9}{2n+1}$ ait une valeur entière :

E.28 Déterminer, si elles existent, les valeurs de $n\in\mathbb{Z}$ afin que la fraction $\dfrac{9-6n}{3n-4}$ ait une valeur entière.

E.29 Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers relatifs vérifiant l'égalité :

$a^2-b^2=11$

11. *Raisonnement par disjonction de cas*

E.30 Montrer que le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 6.

Pour cela, on considère les trois cas suivants :

- Le premier des entiers est divisible par 3.
- Le premier des entiers a un reste de 1 par la division euclidienne par 3.
- Le premier des entiers a un reste de 2 par la division euclidienne par 3.

12. *Raisonnement par l'absurde*

E.31 Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x\,;y\,;z)$ tels que :

$x^2+y^2=z^2$

Ces triplets seront nommés "*triplets pythagoriciens*" en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et noté en abrégé "*TP*".

Ainsi $(3\,;4\,;5)$ est un *TP* car : $3^2+4^2=9+16=25=5^2$

1. Démontrer que, si $(x\,;y\,;z)$ est un *TP*, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(p{\cdot}x\,;p{\cdot}y\,;p{\cdot}z)$ est, lui aussi, un *TP*.
2. Démontrer que, si $(x\,;y\,;z)$ est un *TP*, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

E.32 On considère l'équation dans $\mathbb{Z}$ suivante :

(E) : $a^2+9=2^{40}$

1. Montrer que si a existe alors a est impair.
(on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde)
2. a. Compléter le tableau suivant :

r	1	3	5	7
r^2				
Reste de r^2 par la division euclidienne par 8				

b. La division euclidienne de a par 8 donne l'existence d'un unique couple $(q\,;r)$:

$a=8{\cdot}q+r$; $0\leqslant r<8$

Justifier que si l'entier a est impair, alors l'expression a^2+9 n'est pas divisible par 8.

c. En déduire que l'équation (E) n'admet pas de solution.

13. *Raisonnement par contraposée*

E.33 Soit n un entier naturel. Démontrer l'assertion suivante :

n^2 est impair $\Longrightarrow$ n est impair.

14. *Exercices non-classés*

E.34 On considère la fonction `f` ci-dessous, extrait d'un algorithme, où $\text{Ent}\left(\dfrac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\dfrac{A}{N}$.

```
Fonction f(A)
    N ← 1
    Tant que N⩽√A
        Si A/N−Ent(A/N)=0
        Alors
            (X;Y) ← (N;A/N)
        Fin si
        N ← N+1
```

1. En appelant la fonction f avec la valeur 12 pour l'argument `A`, quelles seront les valeurs affectées au couple `( X ; Y )` de variables lors de l'appel à ce programme.

2. Que représentent les valeurs affectées à la variable `X` lors de l'exécution de ce programme?

