Terminale Option Experte / Arithmétique et divisibilité

1. Decomposition en produit de facteurs premiers

E.1

1. Citer les entiers premiers inférieurs ou égaux à 20.
2. Déterminer les décompositions en produit de facteurs premiers les entiers suivants : 126 ; 588 ; 5040
3. En déduire les décompositions en produit de facteurs premiers des entiers suivants : $\dfrac{5040}{126}$; $126+588$

E.2 Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers suivants :

a. 8232 b. 1750 c. 1053

E.3 k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

E.4

On admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair : $n=2^\alpha\times k$
où α est un entier naturel *(éventuellement nul)* et k un entier naturel impair.

L'écriture $n=2^\alpha\times k$ est nommée *décomposition* de n.

Voici par exemple les décompositions des entiers 9 et 120 :
$9 = 2^0\times 9$; $120 = 2^3\times 15$.

1. Donner la décomposition de l'entier 192.
2. Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont : $x=2^\alpha\times k$; $z=2^\beta\times m$

   Écrire la décomposition des entiers naturels $2\cdot x^2$ et z^2.
3. En examinant l'exposant de 2 dans la décomposition $2\cdot x^2$ et dans celle de z^2, montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x;y)$ tels que :
   $2\cdot x^2 = z^2$

E.5 On considère les deux entiers suivants : $A=72$; $B=135$

1. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers A et B.
2. a. À l'aide d'un arbre de choix, déterminer l'ensemble des diviseurs de A et l'ensemble des diviseurs de B.

   b. Donner l'ensemble des diviseurs commun à A et à B.

E.6 Soit n un entier naturel. On considère l'entier A défini par :
$A = 2^3\times 3^n\times 5^n$

1. a. Déterminer le nombre de diviseurs de l'entier A dans les cas suivant :
   $n=0$; $n=1$; $n=2$

   b. Déterminer une expression en fonction de n donnant le nombre de diviseurs de l'entier A.
2. Combien de diviseurs admet l'entier 6 075 000?

2. Parité

E.7

1. Compléter intuitivement les deux tableaux à double entrée suivants :

+	Pair	Impair
Pair		
Impair		

×	Pair	Impair
Pair		
Impair		

2. En remarquant les deux caractérisations suivantes :
   - Si $n\in\mathbb{Z}$ est pair, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que :
     $n = 2\cdot k$
   - Si $n\in\mathbb{Z}$ est impair, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que :
     $n = 2\cdot k+1$

   Répondre aux questions suivantes :

   a. Démontrer que la somme de deux entiers impairs est pair.

   b. Démontrer que le produit de deux entiers impairs est impair.

E.8 Montrer que la somme des carrés de deux entiers consécutifs est un entier impair

E.9 On considère l'expression $B=n^2-1$ pour $n\in\mathbb{N}^*$:

1. Démontrer que pour n pair, B est impair.
2. Démontrer que pour n un entier impair strictement supérieur à 1, B est pair et divisible par 8.

E.10 Démontrer que la somme de deux entiers impairs consécutifs est un entier multiple de 4.

E.11 Soient p et q deux entiers naturels. Étudions la relation :

$p^2 - 2{\cdot}q^2 = 1$

1. Trouver deux entiers p et q vérifiant la relation précédente et telle que :

$1 \leqslant p \leqslant 4 \quad ; \quad 1 \leqslant q \leqslant 4$

2. On suppose que les entiers p et q vérifient la relation recherchée :
   a. Démontrer que l'entier p est impair.
   b. En déduire que l'entier q est pair.

3. *Quelques problèmes d'arithmétique*

E.12 Déterminer la somme de tous les multiples de 11 compris entre 100 et 400. *(on pourra utiliser une suite arithmétique)*

E.13 Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3.

E.14

1. Pour k un entier naturel non-nul développer l'expression : $A=\left(2{\cdot}k+1\right)^2-1$.
2. Justifier que A est un multiple de 8.

E.15 On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$1+2+\cdots+n = \dfrac{n{\cdot}(n+1)}{2}$

1. Montrer que l'entier $1+2+\cdots+n$ est le carré d'un entier si, et seulement si, il existe un entier naturel p tel que $n^2+n-2{\cdot}p^2=0$.
2. En déduire que l'entier $1+2+\cdots+n$ est le carré d'un entier si, et seulement si, il existe un entier naturel p tel que $(2n+1)^2-8p^2=1$.

4. *Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$*

E.16

1. Parmi les égalités proposées, laquelle représente la division euclidienne de -25 par 3 :
   a. $-25=(-9)\times3+2$ b. $-25=(-8)\times3+(-1)$
2. Déterminer les divisions euclidiennes des nombres suivants par 4 : a. -31 b. -19

5. *Division euclidienne*

E.17 De l'égalité : $456\,164=65\,164\times7+16$, en déduire la division euclidienne de 456 164 par 7.

E.18

1. Sans la calculatrice, effectuer la division euclidienne de 372 par 15.
2. Avec la calculatrice, déterminer la division euclidienne de 37 852 par 23.
3. Utilise les égalités suivantes pour répondre aux questions suivantes :

$2\,456 = 17\times143+25 \quad ; \quad \dfrac{32\,247}{143} = 225+\dfrac{72}{143} \quad ; \quad \dfrac{516}{43} = 12$

$\dfrac{674}{24} = 28+\dfrac{1}{12} \quad ; \quad \dfrac{5\,460}{63} = 85+\dfrac{5}{3} \quad ; \quad 345 = 27\times13-6$

   a. Déterminer la division euclidienne de 2 456 par 17.
   b. Donner la division euclidienne de 32 247 par 143.
   c. Déterminer le reste de la division euclidienne de 516 par 43.
   d. Déterminer la division euclidienne de 674 par 24.
   e. En déduire la division euclidienne de 5 460 par 63.
   f. Déterminer la division euclidienne de 345 par 13.

E.19

On considère la fonction `f` extrait d'un algorithme dont l'appel s'effectue en lui passant en argument deux entiers naturels `a` et `b` :

```
Fonction f(a,b)
    c ← 0
    Tant que  a>b
        c ←  c+1
        a ←  a−b
    Fin Tant que
    Renvoyer (c;a)
```

1. Donner le couple renvoyé par la fonction `f` lorsqu'elle est appelée avec les arguments `a`$=13$ et `b`$=4$. Dans une exécution pas à pas de l'appel à la fonction f, on indiquera les valeurs des variables `a`, `b`, `c` au cours de cet appel.
2. Que représente le couple renvoyé lors de l'appel à la fonction `ff` ?

E.20 L'année 2012 était une année bissextile et le 1^er^ janvier 2012 était un dimanche.

1. a. Combien de jour sépare le 1^er^ janvier 2012 et le 20 janvier 2012?
   b. Donner la division euclidienne de 19 par 7.
   c. Quel jour de la semaine était-on le 20 janvier 2012?
2. Déterminer le jour de la semaine du 25 mars 2012.

E.21 Un numéro de carte bancaire est de la forme:
$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}c$
où a_1, a_2, ..., a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire. c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres. La fonction ci-dessous permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

```
Fonction f(a₁,a₂,a₃,a₄,a₅,a₆,a₇,a₈,a₉,a₁₀,a₁₁
              ,a₁₂,a₁₃,a₁₄,a₁₅,a₁₆,a₁₇,c)
  i ← 0
  p ← 0
  r ← 0
  Pour k allant de 0 à 7
    r ← le reste de la division euclidienne
          de 2·a2k+1 par 9
    i ←  i+r
  Fin Pour
  Pour k allant de 1 à 7
      p ←  p+a2k
  Fin Pour
  s ←  i+p+c
  Si s est un multiple de 10 alors :
      Renvoyer 1
  Sinon
      Renvoyer 0
  Fin Si
```

On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

1. Compléter le tableau ci-dessous permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
r								
i								

2. Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.
3. On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre *(initialement 5)* est changé en 6.
   Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu $6a35$ 4002 9561 3411 reste correct?

6. *Opération sur la division euclidienne*

E.22

1. Déterminer la division euclidienne de 1 038 par 17.
2. En étudiant le carré $(61\times17+1)^2$, déterminer le reste de la division euclidienne de $1\,038^2$ par 17.
3. En déduire une conjecture sur le reste, pour tout entier naturel n, la division euclidienne de $1\,038^n$ par 17.

E.23 Soit n un entier relatif. On considère les deux propriétés suivantes :

- $\mathcal{P}$ *"le reste de la division euclidienne de n par 5 vaut 1"*
- $\mathcal{P}'$ *"le reste de la division euclidienne de n par 4 vaut 3"*

1. a. Soit n un entier naturel vérifiant la propriété $\mathcal{P}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $n-11$ par 5.
   b. Soit n un entier naturel vérifiant la propriété $\mathcal{P}'$. Justifier que l'entier $n-11$ est un multiple de 4.
2. Sans justification, donner trois entiers vérifiant les deux propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

E.24 n est un entier naturel.
Dans la division euclidienne de n par 7, n peut s'écrire :
$n = 7q + r$ où q et r sont des entiers naturels.

1. Que représente r? Quelles sont les valeurs possibles pour r?
2. On divise n^2 par 7. Quelles sont les valeurs possibles pour r?
3. En déduire que si 7 divise n^2 alors 7 divise n.
4. n et m sont deux entiers naturels. On divise n^2+m^2 par 7. Quels sont les restes possibles?
5. En déduire que si 7 divise n^2+m^2 alors 7 divise n et m.

7. *Diviseur et multiple*

E.25 α et β représentent deux entiers ; on considère les quatre phrases suivantes :

1. α est un multiple de β
2. α a pour multiple β
3. α est un diviseur β
4. α a pour diviseur β

Les phrases ci-dessus sont équivalentes deux à deux ; retrouver les phrases équivalentes.

E.26

(1) (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^2 par 3.

(b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier n naturel, le reste de 10^n par la division euclidienne par 3 vaut 1.

(2) Justifier que l'entier $4\times10^n-1$ est, pour tout entier naturel n, divisible par 3.

E.27 Pour tout entier naturel n, on pose : $A(n)=n^2-n+2007$.
Le but de l'exercice est d'étudier la divisibilité des entiers $A(n)$ par 2 et par 3.

Cet exercice est composé de deux questions indépendantes.

(1) (a) Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier $A(1)$ égal à 2007.

(b) Soit n un entier naturel. Démontrer que : "*Si n est divisible par 3, alors $A(n)$ est divisible par 3*".

(c) La réciproque de cette dernière affirmation est-elle vraie ? Justifier.

(2) (a) Vérifier que, quel que soit l'entier naturel n, on a :
$$(n+1)^2-(n+1)+2007=(n^2-n+2007)+2\cdot n$$

(b) On considère un entier naturel n quelconque. Démontrer que : "*Si $A(n)$ est impair, alors $A(n+1)$ est impair*".

(c) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
"*Il existe au moins un entier naturel n tel que $A(n)$ soit divisible par 2*".

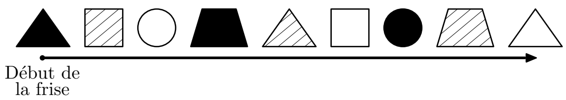
E.28 Pour tout entier relatif n, on considère l'entier A_n défini par :
$$A_n=2n^2+2n+8$$
Justifier que l'entier A_n est divisible par 4 pour tout entier relatif $n\in\mathbb{Z}$

E.29 Soit n un entier relatif. Établir la propriété suivante :
$$2n+3 \text{ est un multiple de } 7 \Longrightarrow 3n+1 \text{ est un multiple de } 7.$$

8. *Problème et reste de la division euclidienne*

E.30 Une frise est constituée de carrés, triangles, cercles et trapèzes se succédant régulièrement. Ces éléments sont successivement peints en blanc, avec des rayures ou en noir.

Le début de la frise est représenté ci-dessous :



(1) Donner les caractéristiques du 113$^{\text{ième}}$ élément de cette frise.

(2) Quel est l'élément suivant le 113$^{\text{ième}}$ élément et ayant les mêmes caractéristiques ?

E.31 Un système de codage permet de transformer toute lettre d'un texte en un autre rendant ainsi le texte illisible.

Pour cela, il numérote les lettres de l'alphabet en commençant par 0. Une transformation sur l'entier permet alors de changer la lettre.

Voici le tableau de correspondance de ce codage :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	[redacted]	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	F	I	L	O	R	U	X	A	D	G															

Quelle transformation a été utilisée sur les entiers ?

9. *Manipulation du reste de la division euclidienne*

E.32 Dans cet exercice, on s'intéresse à la division euclidienne par 4 et plus particulièrement au reste de la division par 4 :

(1) Soit x et y deux nombres entiers dont le reste par la division euclidienne par 4 vaut respectivement 2 et 3.

(a) Donner une expression caractérisant la division euclidienne de x par 4 ainsi que pour la division euclidienne de y par 4.

(b) Établir que le reste de la division $(x+y)$ par 4 vaut 1.

(c) Établir que le reste de la division $x\cdot y$ par 4 vaut 2

(2) Soit x et y deux nombres entiers ; on note r_x et r_y les restes de la division respectivement de x et de y par 4.

On considère les deux tableaux ci-dessous :

r_y \ r_x	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

r_{x+y}

r_y \ r_x	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

$r_{x\cdot y}$

On note r_{x+y} et $r_{x\cdot y}$ les restes respectifs par la division par 4 des entiers $(x+y)$ et $(x\cdot y)$.

(a) Inscrire dans ces deux tableaux, les résultats obtenus à la question (1).

(b) Compléter de manière "*intuitive*" ces deux tableaux.

E.33 On donne la division euclidienne de 195 695 par 3 :

$195\,695 = 65\,231 \times 3 + 2$

1. Justifier que le reste de la division euclidienne de $(195\,695 \times 2)$ par 3 est 1.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(195\,695 \times 3)$ par 3.
3. On note r_n le reste de la division euclidienne de $(195\,695 \times n)$ par 3. Compléter de tête le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
r_n							

E.34 La division euclidienne de l'entier 7^{17} par 4 a pour reste 3. On répondra aux questions suivantes en justifiant votre réponse.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 7^{17} par 2.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne 7^{34} par 4.

E.35 On donne les deux divisions euclidiennes par 5 suivantes :

$5474 = 1094 \times 5 + 4 \quad ; \quad 5487 = 1097 \times 5 + 2$

Sans utiliser la calculatrice et sans calculer de produit, montrer que l'entier $5474^2 + 5487^2$ est divisible par 5.

Votre démarche doit être entièrement présente sur votre copie.

E.36 n est un entier naturel.
Dans la division euclidienne de n par 7, n peut s'écrire :

$n = 7 \cdot q + r$ où q et r sont des entiers naturels.

1. Que représente r ? Quelles sont les valeurs possibles pour r ?
2. On divise n^2 par 7. Quelles sont les restes possibles?
3. En déduire que si 7 divise n^2 alors 7 divise n.

10. *Raisonnement exhaustif*

E.37 Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels vérifiant l'égalité :

$a^2 - b^2 = 21$

E.38 On considère l'entier A défini par :

$A = m \times (4 \cdot n + 1)$ où $m, n \in \mathbb{N}$.

On cherche à déterminer les valeurs de m et n réalisant l'égalité $A = 45$.

1. En étudiant la relation $45 = m \times (4 \cdot n + 1)$, donner un ensemble de valeurs possibles de m.
2. En déduire l'ensemble des couples $(m\,;n)$ réalisant $A = 45$.

E.39

1. Déterminer la valeur de a et b deux entiers relatifs tels que, pour tout entier relatif n, on a :
$$\frac{4n+1}{n+1} = a + \frac{b}{n+1}$$
2. En déduire les valeurs de n pour laquelle $\frac{4n+1}{n+1}$ est un entier.

E.40 Soit a et b deux entiers naturels.

1. Démontrer que :
$a^2 \cdot b - a \cdot b^2 = 9 \implies a \cdot b$ divise 9 et $a - b$ divise 9.
2. En déduire les couples de solutions $(a\,;b)$ tels que :
$a^2 \cdot b - a \cdot b^2 = 9$.

E.41 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le quotient de la division euclidienne de n par 5 soit égal au reste par la même division.

E.42 On considère l'entier B défini par :

$B = (2 \cdot m + 3) \cdot (2 \cdot n)$ où $m, n \in \mathbb{N}$

Déterminer l'ensemble des couples $(m\,;n)$ d'entiers vérifiant la relation $B = 70$.

E.43 Déterminer, si elles existent, les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ afin que la fraction $\frac{6n+9}{2n+1}$ ait une valeur entière :

E.44 Déterminer, si elles existent, les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ afin que la fraction $\frac{9-6n}{3n-4}$ ait une valeur entière.

E.45 Pour tout entier relatif n différent de 1, on considère le nombre : $A_n = \frac{2n^2 - n - 11}{n-1}$

1. Déterminer la valeur des entiers relatifs a, b, c vérifiant la relation suivante pour tout entier naturel n distinct de 1 : $A_n = a \cdot n + b + \frac{c}{n-1}$
2. En déduire les valeurs de n telles que l'entier A_n est un nombre entier.

E.46 On considère pour tout entier relatif, le nombre B_n défini par : $B_n = \frac{2n^2 - 3n - 15}{2n+3}$

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles B_n est un entier relatif.

E.47 Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers relatifs vérifiant l'égalité :

$a^2 - b^2 = 11$

11. *Raisonnement par disjonction de cas*

E.48 Montrer que le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 6.

Pour cela, on considère les trois cas suivants :

- Le premier des entiers est divisible par 3.
- Le premier des entiers a un reste de 1 par la division euclidienne par 3.
- Le premier des entiers a un reste de 2 par la division euclidienne par 3.

E.49 Montrer que pour tout entier naturel n, l'expression $3n^2+n+2$ est divisible par 2.

E.50 Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N=a^2-b^2$ où a et b sont deux entiers naturels tels que $a>b$.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et de q?

12. *Raisonnement par l'absurde*

E.51 Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x\,;y\,;z)$ tels que :

$$x^2+y^2=z^2$$

Ces triplets seront nommés "*triplets pythagoriciens*" en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et noté en abrégé "*TP*".
Ainsi $(3\,;4\,;5)$ est un *TP* car : $3^2+4^2=9+16=25=5^2$

1. Démontrer que, si $(x\,;y\,;z)$ est un *TP*, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(p{\cdot}x\,;p{\cdot}y\,;p{\cdot}z)$ est, lui aussi, un *TP*.
2. Démontrer que, si $(x\,;y\,;z)$ est un *TP*, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

E.52 On considère l'équation dans $\mathbb{Z}$ suivante :

$$(E):\quad a^2+9=2^{40}$$

1. Montrer que si a existe alors a est impair.
(on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde)
2. a. Compléter le tableau suivant :

r	1	3	5	7
r^2				
Reste de r^2 par la division euclidienne par 8				

b. La division euclidienne de a par 8 donne l'existence d'un unique couple $(q\,;r)$:

$$a=8{\cdot}q+r\quad;\quad 0\leqslant r<8$$

Justifier que si l'entier a est impair, alors l'expression a^2+9 n'est pas divisible par 8.

c. En déduire que l'équation (E) n'admet pas de solution.

E.53 Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x\,;y\,;z)$ tels que :

$$x^2+y^2=z^2$$

Ces triplets seront nommés "*triplets pythagoriciens*" en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé "*TP*".
Ainsi, $(2\,;3\,;4)$ est un TP car : $3^2+4^2=5^2$

Partie A : généralités

1. Démontrer que, si $(x\,;y\,;z)$ est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(px\,;py\,;pz)$ est, lui aussi, un TP.
2. Démontrer que, si $(x\,;y\,;z)$ est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.
3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :

$$n=2^{\alpha}\times k$$

où α est un entier naturel *(éventuellement nul)* et k un entier naturel impair.

L'écriture $n=2^{\alpha}\times k$ est nommée *décomposition de n*.

Voici par exemple les *décompositions* des entiers 9 et 120 :

$$9=2^0\times 9\quad;\quad 120=2^3\times 15$$

a. Donner la décomposition de l'entier 192.

b. Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont :

$$x=2^{\alpha}\times k\quad;\quad z=2^{\beta}\times m$$

Écrire la décomposition des entiers naturels $2x^2$ et z^2.

c. En examinant l'exposant de 2 dans la décomposition de $2x^2$ et dans celle de z^2, montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x\,;y)$ tels que $2x^2=z^2$.

On admet que la question **A** 3 permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x\,;y\,;z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant :

$$x<y<z$$

Partie B ; recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x\,;y\,;2015)$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n :

$$(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2$$

Déterminer un TP de la forme $(2015\,;y\,;z)$

3. a. En remarquant que $403^2=169\times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls $(x\,;z)$ tels que :

$$z^2-x^2=403^2\quad\text{avec } x<403$$

b. En déduire un TP de la forme $(x\,;2015\,;z)$.

13. *Raisonnement par contraposée*

E.54 Soit n un entier naturel. Démontrer l'assertion suivante :

$$n^2 \text{ est impair} \implies n \text{ est impair.}$$

14. *Exercices non-classés*

E.55 On considère la fonction `f` extrait d'un algorithme :

```
Fonction f(A)
    X ← A
    Tant que  X⩾26
        X ← X−26
    Fin du tant que
    Renvoyer X
```

1. Quelle est la valeur renvoyée par la fonction `f` lorsqu'elle est appelée avec pour argument l'entier 3?
2. Quelle est la valeur renvoyée par la fonction `f` lorsqu'elle est appelée avec pour argument l'entier 55?
3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente la valeur renvoyée par cette fonction?

E.56 On considère la fonction `f` ci-dessous, extrait d'un algorithme, où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

```
Fonction f(A)
    N ← 1
    Tant que N⩽√A
        Si A/N−Ent(A/N)=0
        Alors
            (X;Y) ← (N;A/N)
        Fin si
        N ← N+1
    Fin Tant que
```

1. En appelant la fonction f avec la valeur 12 pour l'argument `A`, quelles seront les valeurs affectées au couple `(X;Y)` de variables lors de l'appel à ce programme.
2. Que représentent les valeurs affectées à la variable `X` lors de l'exécution de ce programme?