1. Exercices non-classés

E.1 *Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :
$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$$
   - a) toutes les solutions sont des entiers pairs
   - b) il n'y a aucune solution
   - c) les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$
   - d) les solutions vérifient :
   $x \equiv 2 \pmod{6}$ ou $x \equiv 5 \pmod{6}$

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x+34y=2$, où x et y sont des entiers relatifs.
   - a) Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
   $(x\,;y) = (34k-7\,;5-24k)$, $k \in \mathbb{Z}$
   - b) L'équation (E) n'a aucune solution
   - c) Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
   $(x\,;y) = (17k-7\,;5-12k)$, $k \in \mathbb{Z}$
   - d) Les solutions de (E) sont toutes de la forme
   $(x\,;y) = (-7k\,;5k)$, $k \in \mathbb{Z}$

3. On considère les deux entiers $n=1789$ et $p=1789^{2005}$. On a alors :
   - a) $n \equiv 4 \pmod{17}$ et $p \equiv 0 \pmod{17}$
   - b) p est un entier premier
   - c) $p \equiv 4 \pmod{17}$
   - d) $p \equiv 1 \pmod{17}$

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si, et seulement si, le point M d'affixe z est tel que :
   - a) $z = \dfrac{b-\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}}$
   - b) $z - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot(b-a)$
   - c) $a - z = \mathrm{i}\cdot(b-z)$
   - d) $b - z = \dfrac{\pi}{2}\cdot(a-z)$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.
   - a) $h\circ g\circ f$ transforme A en b et c'est une rotation.
   - b) $h\circ g\circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$
   - c) $h\circ g\circ f$ n'est pas une similitude.
   - d) $h\circ g\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

E.2 Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour unité graphique $4\,cm$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :
$$a=1 \quad ; \quad b=1+2\mathrm{i} \quad ; \quad c=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad d=3+2\mathrm{i}$$
On considère la similitude directe s qui transforme A en b et C en D. Soit M un point d'affixe z et M', d'affixe z', son image par s.

1. Exprimer z' en fonction de z.
Déterminer les éléments caractéristiques de s.

Soit $\left(U_n\right)$ la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n+1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.
3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes de la suite $\left(U_n\right)$.
4. Montrer que pour tout entier naturel n : $U_n = 2^n - 1$.
5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geqslant p$:
$$U_n = U_p\cdot\left(U_{n-p}+1\right)+U_{n-p}$$
La notation $pgcd(a\,;b)$ est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b. Montrer pour $n \geqslant p$ l'égalité :
$$\mathrm{pgcd}(U_n\,;U_p) = \mathrm{pgcd}(U_p\,;U_{n-p})$$
6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que :
$$\mathrm{pgcd}(U_n\,;U_p) = U_{\mathrm{pgcd}(n\,;p)}$$
Déterminer l'entier : $\mathrm{pgcd}(U_{2005}\,;U_{15})$

