




# Terminale Option Experte / Autres annales

## 1. Exercices non-classés

**E.1**    Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fautive enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

- ① On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :

$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$$

- a) toutes les solutions sont des entiers pairs  
 b) il n'y a aucune solution  
 c) les solutions vérifient  $x \equiv 2 \pmod{6}$   
 d) les solutions vérifient :

$$x \equiv 2 \pmod{6} \text{ ou } x \equiv 5 \pmod{6}$$

- ② On se propose de résoudre l'équation (E) :  $24x + 34y = 2$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

- a) Les solutions de (E) sont toutes de la forme :

$$(x; y) = (34k - 7; 5 - 24k), k \in \mathbb{Z}$$

- b) L'équation (E) n'a aucune solution

- c) Les solutions de (E) sont toutes de la forme :

$$(x; y) = (17k - 7; 5 - 12k), k \in \mathbb{Z}$$

- d) Les solutions de (E) sont toutes de la forme

$$(x; y) = (-7k; 5k), k \in \mathbb{Z}$$

- ③ On considère les deux entiers  $n = 1789$  et  $p = 1789^{2005}$ . On a alors :

a)  $n \equiv 4 \pmod{17}$  et  $p \equiv 0 \pmod{17}$

b)  $p$  est un entier premier

c)  $p \equiv 4 \pmod{17}$

d)  $p \equiv 1 \pmod{17}$




- ④ On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a$  et  $b$ . Le triangle  $MAB$  est rectangle isocèle direct d'hypoténuse  $[AB]$  si, et seulement si, le point  $M$  d'affixe  $z$  est tel que :

a)  $z = \frac{b - ia}{1 - i}$        b)  $z - a = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot (b - a)$

c)  $a - z = i \cdot (b - z)$        d)  $b - z = \frac{\pi}{2} \cdot (a - z)$

- ⑤ On considère dans le plan orienté deux points distincts  $A$  et  $B$ ; on note  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ . Soit  $f$  la similitude directe de centre  $A$ , de rapport 2 et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ ; soit  $g$  la similitude directe de centre  $A$ , de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ ; soit  $h$  la symétrie centrale de centre  $I$ .

- a)  $h \circ g \circ f$  transforme  $A$  en  $b$  et c'est une rotation.  
 $h \circ g \circ f$  est la réflexion ayant pour axe  
 b) la médiatrice du segment  $[AB]$   
 c)  $h \circ g \circ f$  n'est pas une similitude.  
 d)  $h \circ g \circ f$  est la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$

**E.2**    Le plan complexe  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $a, b, c$  et  $d$  telles que :

$$a = 1 \quad ; \quad b = 1 + 2i \quad ; \quad c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad d = 3 + 2i$$

On considère la similitude directe  $s$  qui transforme  $A$  en  $b$  et  $C$  en  $D$ . Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  et  $M'$ , d'affixe  $z'$ , son image par  $s$ .

- ① Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ .  
Déterminer les éléments caractéristiques de  $s$ .

Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- ② Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1}$  et  $U_n$  sont premiers entre eux.  
 ③ Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude  $s$ , les termes de la suite  $(U_n)$ .  
 ④ Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $U_n = 2^n - 1$ .  
 ⑤ Montrer que, pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$  non nuls tels que  $n \geq p$  :

$$U_n = U_p \cdot (U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$$

La notation  $\text{pgcd}(a; b)$  est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels  $a$  et  $b$ . Montrer pour  $n \geq p$  l'égalité :

$$\text{pgcd}(U_n; U_p) = \text{pgcd}(U_p; U_{n-p})$$

- ⑥ Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls, montrer que :

$$\text{pgcd}(U_n; U_p) = U_{\text{pgcd}(n; p)}$$

Déterminer l'entier :  $\text{pgcd}(U_{2005}; U_{15})$