Terminale Option Experte / Chaines de Markov

1. Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 de matrices

E.1 On considère les matrices M et R définies par :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}85 \end{pmatrix} \quad ; \quad R = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On définit la suite de matrice (X_n) définie par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1100 \\ 1100 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_{n+1} = M \cdot X_n + R \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$X_n = \begin{pmatrix} 1300 - 200 \times 0{,}75^n \\ 900 + 200 \times 0{,}75^n \end{pmatrix}$$

E.2 On considère les matrices A, B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On considère la suite (U_n) de matrices colonnes définies par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad U_{n+1} = A \cdot U_n + B \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Justifier que la matrice C vérifie l'égalité :
   $C = A \cdot C + B$
2. On définit la suite (V_n) de matrices lignes par la relation :
   $V_n = U_n - C \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   a. Justifier l'égalité :
      $V_{n+1} = A \cdot V_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   b. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a :
      $$U_n = \begin{pmatrix} 3^{n+2} - 9 \times 2^n + 1 \\ 3 \times 2^n - 1 \end{pmatrix}$$

2. Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 de matrices : état stable et suite conjointe

E.3

Définition :
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère une suite (U_n) de matrice colonne comportant k lignes vérifiant une relation de la forme :
$U_{n+1} = A \cdot U_n + B \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
où A est une matrice carrée d'ordre k et B est une matrice colonne comportant k lignes.

On appelle **état stable** de la suite (U_n), la matrice colonne S *(comportant k lignes)* et vérifiant : $\quad S = A \cdot S + B$

On considère une suite (U_n) vérifiant la relation :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot U_n + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que la matrice $S = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un état stable de la suite (U_n) de matrices.

E.4 On considère la suite (X_n) de matrices colonne, vérifiant :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -20 & 7 \end{pmatrix} \cdot X_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Vérifier que la matrice $S = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$ représente l'état stable de cette relation de récurrence.
2. On considère la suite (V_n) de matrices colonnes définies, pour tout entier naturel n, par : $\quad V_n = X_n - S$
   a. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad V_{n+1} = A \cdot V_n$
   b. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a :
      $$V_n = \begin{pmatrix} 7 \times 2^n - 4 \times 3^n \\ 7 \times 2^{n+2} - 20 \times 3^n \end{pmatrix}$$
   c. En déduire l'expression de la matrice X_n en fonction de n.

3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 de matrices : étude de l'état stable

E.5 On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) dont les termes vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} = -2x_n + 4y_n + 3 \end{cases}$$

1. On considère la matrice colonne B et, pour tout entier n, la matrice colonne X_n définie par :
   $$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$
   Déterminer la matrice carrée A de dimension 2 vérifiant la relation :
   $X_{n+1} = A \cdot X_n + B$

2 a Justifier que la matrice I_2-A est inversible. On donnera l'expression de la matrice $\left(I_2-A\right)^{-1}$.

b Déterminer la matrice X réalisant l'égalité :
$X = A{\cdot}X + B$

c Si les suites $\left(x_n\right)$ et $\left(y_n\right)$ sont convergentes, donner les valeurs de leur limite.

3 On considère la suite $\left(V_n\right)$ de matrice-colonne définie par :
$V_n = X_n - X$

En déduire que, pour tout entier n naturel, la relation :
$V_n = A^n{\cdot}V_0$

4 On considère la matrice carrée P définie par :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a Justifier que la matrice P est inversible.

b On note D la matrice définie par : $D = P^{-1}{\cdot}A{\cdot}P$.
Donner une expression de la matrice D^n pour tout entier naturel n.

c En déduire une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n.

5 On prend comme valeur initiale des suites :
$x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 2$
Que peut-on dire sur la convergence des suites $\left(x_n\right)$ et $\left(y_n\right)$?

E.6 On considère les deux suites réelles $\left(x_n\right)$ et $\left(y_n\right)$ dont les termes vérifient le système suivant :
$$\begin{cases} x_{n+1} = 1{,}4x_n - 0{,}6y_n + 0{,}2 \\ y_{n+1} = 0{,}9x_n - 0{,}1y_n + 0{,}3 \end{cases}$$

1 On considère la matrice colonne B et, pour tout entier n, la matrice colonne X_n définies par :
$$B = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$
Déterminer la matrice carrée A de dimension 2 vérifiant la relation :
$X_{n+1} = A{\cdot}X_n + B$

2 a Justifier que la matrice I_2-A est inversible, puis donner à l'expression de la matrice $(I_2-A)^{-1}$.

b Déterminer la matrice X réalisant l'égalité :
$X = A{\cdot}X + B$

c Si les suites $\left(x_n\right)$ et $\left(y_n\right)$ sont convergentes, donner les valeurs de leur limite.

3 On considère la suite $\left(V_n\right)$ de matrices colonnes définie par :
$V_n = X_n - X \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

En déduire que, pour tout entier n naturel, la relation :
$V_n = A^n{\cdot}V_0$

4 On considère la matrice carrée P définie par :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a Justifier que la matrice P est inversible.

b On note D la matrice définie par : $D = P^{-1}{\cdot}A{\cdot}P$.
Donner une expression de la matrice D^n pour tout entier naturel n.

c En déduire une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n.

5 En considérant les valeurs de départ :
$x_0 = 0{,}5 \quad ; \quad y_0 = 0{,}5$
Que peut-on dire de la convergence des suites $\left(x_n\right)$ et $\left(y_n\right)$?

4. *Chaîne de Markov : graphe pondéré orienté associé*

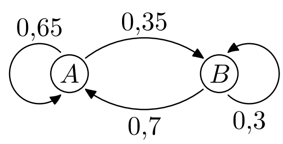
E.7 On considère la chaîne de Markov $\left(\mathcal{X}_n\right)$ dans l'espace des états $\Omega = \left\{e_1\,;e_2\right\}$ dont l'évolution des distributions est donnée, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par :
$$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_1)}\left(\mathcal{X}_{n+1}=e_1\right) = 0{,}2 \quad ; \quad \mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_1)}\left(\mathcal{X}_{n+1}=e_2\right) = 0{,}8$$
$$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_2)}\left(\mathcal{X}_{n+1}=e_1\right) = 0{,}7 \quad ; \quad \mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_2)}\left(\mathcal{X}_{n+1}=e_2\right) = 0{,}3$$
Donner le graphe pondéré orienté associé à cette chaîne de Markov.

E.8 On considère la chaîne de Markov $\left(\mathcal{X}_n\right)$ dans l'espace des états $\Omega = \left\{e_1\,;e_2\,;e_3\right\}$ dont l'évolution des distributions est donnée, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par :
$$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_1)}\left(\mathcal{X}_{n+1}=e_1\right) = 0{,}2 \quad ; \quad \mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_1)}\left(\mathcal{X}_{n+1}=e_2\right) = 0{,}1$$
$$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_1)}\left(\mathcal{X}_{n+1}=e_3\right) = 0{,}7 \quad ; \quad \mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_2)}\left(\mathcal{X}_{n+1}=e_1\right) = 0{,}6$$
$$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_2)}\left(\mathcal{X}_{n+1}=e_2\right) = 0{,}2 \quad ; \quad \mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_2)}\left(\mathcal{X}_{n+1}=e_3\right) = 0{,}2$$
$$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_3)}\left(\mathcal{X}_{n+1}=e_1\right) = 0{,}5 \quad ; \quad \mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_3)}\left(\mathcal{X}_{n+1}=e_2\right) = 0{,}1$$
$$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_3)}\left(\mathcal{X}_{n+1}=e_3\right) = 0{,}4$$
Donner le graphe pondéré orienté associé à cette chaîne de Markov.

5. *Chaîne de Markov : du graphe vers la matrice de transition*

E.9 On considère un phénomène évolutif entre deux états A et B. On note respectivement a_n et b_n l'effectif associé à ces deux états au rang n.

Ci-dessous est représenté le graphe pondéré orienté associé à cette évolution :

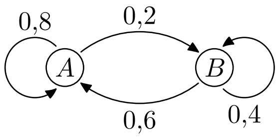


Déterminer la matrice T de transition vérifiant la relation :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \cdot T$$

E.10 On considère un phénomène évolutif entre deux états A et B. On note respectivement a_n et b_n l'effectif associé à ces deux états au rang n.

Le graphe ci-dessous représente le graphe pondéré orienté associé.

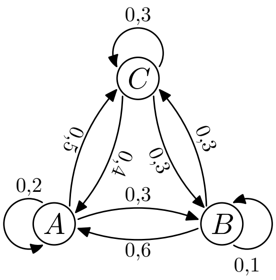


Déterminer la matrice T de transition vérifiant la relation :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$$

E.11

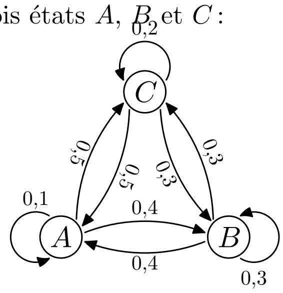
On s'intéresse à la répétition d'une expérience aléatoire comportant trois issues A, B, C. À chaque répétition, l'évolution des probabilités de ses issues est soumise aux probabilités conditionnelles résumées dans les graphes probabilistes ci-dessous.



On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des événements A, B, C lors de la $n^{\text{ième}}$ répétition.
Déterminer la matrice M de transition vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$

E.12 Le graphe ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A, B et C :

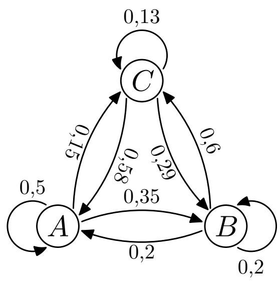


On note a_n, b_n, c_n les probabilités associées à chacun des états à l'étape n.

1. Déterminer une expression de chacun des termes a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. **Modélisation des états par une matrice ligne**
   On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice-ligne représentant l'état à l'étape n.
   Déterminer la matrice A de transition réalisant l'égalité :
   $U_{n+1} = U_n \cdot A$
3. **Modélisation des états par une matrice colonne**
   On note $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne représentant l'état à l'étape n.
   Déterminer la matrice B de transition réalisant l'égalité :
   $V_{n+1} = B \cdot V_n$

E.13

On s'intéresse à la répétition d'une expérience aléatoire comportant trois issues A, B, C. À chaque répétition, l'évolution des probabilités de ses issues est soumise aux probabilités conditionnelles résumées dans les graphes probabilistes ci-dessous.



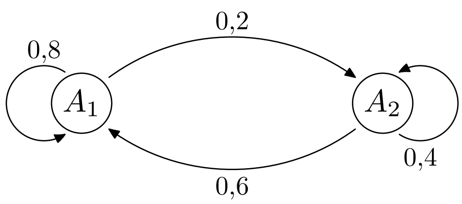
On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des événements A, B, C lors de la $n^{\text{ième}}$ répétition.
Déterminer la matrice M de transition vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \cdot M$$

E.14 On considère deux villes A_1 et A_2 d'une même région et on étudie les mouvements migratoires entre ces deux villes :

1. L'étude montre que :
   - Chaque année 20 % de la population de la ville A_1 partent s'installer dans la ville A_2
   - Chaque année 60 % de la population de la ville A_2 partent s'installer dans la ville A_1

   On schématise cette situation par le graphe ci-dessous :



   On souhaite rassembler ces données dans la matrice M composée de deux lignes et de deux colonnes. Le coefficient m_{ij}, situé à la i^e ligne et la j^e colonne, représentent la fréquence des personnes habitant la première année dans la ville A_i et vivant l'année suivante dans la ville A_j.

   a. Quelle interprétation peut-on donner des coefficients m_{21} et m_{22}?
   b. Écrire la matrice représentant cette situation.
2. Une nouvelle étude donne les chiffres suivants :
   - Chaque année 65 % de la population de la ville A_1 ne déménage pas.
   - Chaque année 30 % de la population de la ville A_2 ne déménage pas.

   a. Produire le graphe représentant cette situation.
   b. En conservant les conventions de la question 1 b, écrire la matrice correspondant à cette matrice.

6. *Chaîne de Markov : utilisation de la matrice de transition*

E.15 On considère une chaîne de Markov dans l'espace des états $\Omega = \{e_1\,;e_2\,;e_3\}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la distribution des états à l'étape n est représentée par la matrice π_n définie par :

$$\pi_n = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\mathcal{X}_n = e_1) & \mathcal{P}(\mathcal{X}_n = e_2) & \mathcal{P}(\mathcal{X}_n = e_3) \end{pmatrix}$$

La matrice de transition A associée à cette évolution vérifiant la relation $\pi_{n+1} = \pi_n \cdot A$ est donnée ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les probabilités suivantes :

(a) $\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n = e_2)}(\mathcal{X}_{n+1} = e_1)$ (b) $\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n = e_3)}(\mathcal{X}_{n+1} = e_2)$

E.16 On considère une chaîne de Markov dans l'espace des états $\Omega = \{e_1\,;e_2\}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la distribution des états à l'étape n est représentée par la matrice π_n définie par :

$$\pi_n = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\mathcal{X}_n = e_1) & \mathcal{P}(\mathcal{X}_n = e_2) \end{pmatrix}$$

La matrice de transition A associée à cette évolution vérifiant la relation $\pi_{n+1} = \pi_n \cdot A$ est donnée ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer la probabilité : $\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n = e_2)}(\mathcal{X}_{n+2} = e_1)$

(2) (a) Donner la matrice A^2.

(b) Quelle remarque peut-on faire ? Quelle conjecture peut-on émettre ?

7. *Chaîne de Markov : recherche de la valeur des états*

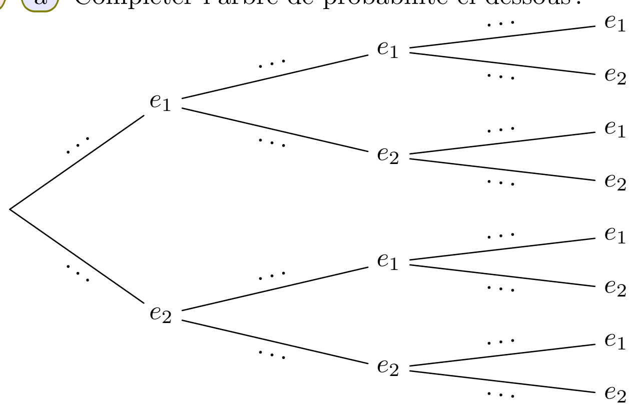
E.17 On considère la chaîne $(\mathcal{X}_n)$ de Markov dans l'espace des états $\{e_1\,;\,e_2\}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$\mathcal{P}(\mathcal{X}_{/} = e_1) = 0{,}3$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}_{/} = e_2) = 0{,}7$

$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n = e_1)}(\mathcal{X}_{n+1} = e_1) = 0{,}8$; $\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n = e_1)}(\mathcal{X}_{n+1} = e_2) = 0{,}2$

$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n = e_2)}(\mathcal{X}_{n+1} = e_1) = 0{,}4$; $\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n = e_2)}(\mathcal{X}_{n+1} = e_2) = 0{,}6$

(1) (a) Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



(b) Déterminer les probabilités suivantes :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}_2 = e_1)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}_2 = e_2)$

(2) Pour tout entier naturel n, on note M_n la matrice des distributions à l'étape n définie par :

$$M_n = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\mathcal{X}_n = e_1) & \mathcal{P}(\mathcal{X}_n = e_2) \end{pmatrix}$$

On note A la matrice de transition associée à la chaîne de Markov réalisant la relation :

$$M_{n+1} = M_n \cdot A$$

(a) Donner la matrice A.

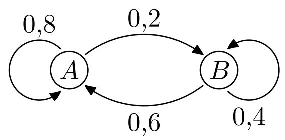
(b) À l'aide de la calculatrice, donner la matrice : $M_0 \cdot A^2$

(c) Que remarque-t-on ?

E.18 On considère deux gaz A et B qui en contact se transforme l'un en l'autre. Au départ, le mélange est composé de 20 ℓ de gaz A et 50 ℓ de gaz B.

Une étude montre que chaque heure :
- 20 % du gaz A se transforme en gaz B ;
- 60 % du gaz B se transforme en gaz A.

On schématise ce phénomène par le graphe pondéré suivant :



(1) Déterminer la composition du mélange au bout de $3\,h$.

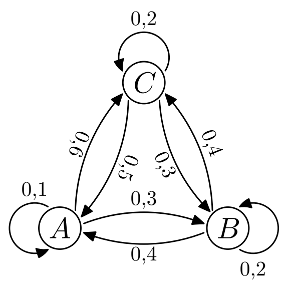
(2) À l'aide de la calculatrice, effectuer le calcul :

$$\begin{pmatrix} 20 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}^3$$

E.19

Le graphe ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A, B et C :

On note a_n, b_n, c_n les probabilités associées à chacun des états à l'étape n.



Les valeurs initiales sont : $a_0 = 5$; $b_0 = 2$; $c_0 = 7$

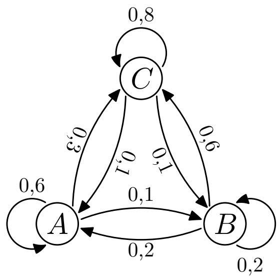
(1) Donner la matrice M de transition associée à ce graphe probabiliste vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \cdot M$$

(2) À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs associées à chacun de ses états à l'étape 3. On arrondira les résultats au millième près.

E.20

Le graphe ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A, B et C :



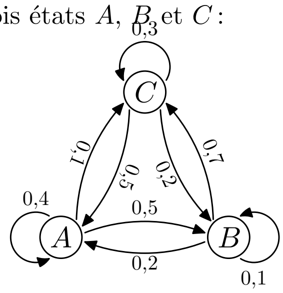
On considère la matrice-ligne :

$U_0=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3\end{pmatrix}$

représentant la valeur des probabilités d'être situé sur chacun des sommets à l'étape 0.

À l'aide de calculatrice et en observant les différents termes U_1, U_2, U_3,…,U_{20}, quelle conjecture peut-on effectuer?

E.21 Le graphe ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A, B et C :



On considère la matrice-colonne $U_2=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3\end{pmatrix}$ représentant la valeur des probabilités d'être situé sur chacun des sommets à l'étape 2.

1. Donner la matrice de transition A réalisant la relation de récurrence :
   $U_{n+1}=U_n{\cdot}A \quad$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur initiale des probabilités.

E.22 Une ville est composée principalement de deux quartiers qu'on note A et B.

Le quartier A est composé de 251 habitants et le quartier B est composé de 386 habitants.

1. En choisissant au hasard un habitant dans la ville, quelle est la probabilité que celui-ci vienne du quartier A? On arrondira les probabilités au millième.

On note a_0 la probabilité de choisir un habitant du quartier A et b_0 la probabilité de choisir un habitant du quartier B.

La matrice ligne U_0 définie par $\begin{pmatrix}a_0 & b_0\end{pmatrix}$ représente l'état de ces probabilités lors de la première année d'étude de cette ville.

Chaque année, on estime :

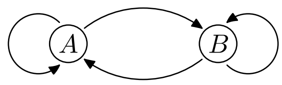
- 5 % des habitants du quartier A déménagent pour aller dans le quartier B ;
- 12 % des habitants du quartier B déménagent pour aller dans le quartier A ;

On note a_n *(resp. b_n)* la probabilité de choisir respectivement un habitant du quartier A *(resp. du quartier B)* lors de la n-ième année d'étude.

On considère la matrice ligne U_n définie par :

$U_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$

2. a. Recopier et compléter le diagramme ci-dessous afin de représenter les flux de populations entre ces deux quartiers.



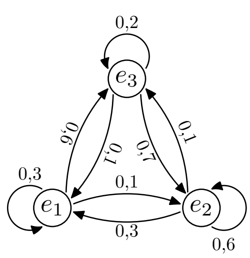
   b. Écrire les termes a_{n+1} et b_{n+1} en fonction des valeurs de a_n et b_n.

   c. Déterminer la matrice carrée T de dimensions 2 réalisant l'égalité pour tout entier naturel n :
   $U_{n+1}=U_n\cdot T$
3. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir la relation suivante pour tout entier naturel n :
   $U_n=U_0\cdot T^n$
4. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul matriciel, déterminer les matrices ligne U_5, U_{10} et U_{20} dont les coefficients seront arrondis à 10^{-5}.

8. *Chaîne de Markov : distribution invariante*

E.23

On considère une chaîne $(\mathcal{X}_n)$ de Markov dans l'espace des états $\{e_1\,;\,e_2\,;\,e_3\}$ dont le graphe associé est donné ci-contre.



Vérifier que la matrice π représentant la distribution invariante est :

$\pi=\begin{pmatrix}0{,}25 & 0.5 & 0.25\end{pmatrix}$

E.24 Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H.

Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état : “*la commande est passée auprès du fournisseur A*” ;
- H désigne l'état : “*la commande est passée auprès du fournisseur H*”.

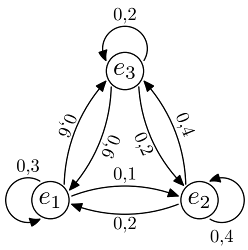
La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H, est :

$$M=\begin{pmatrix}0{,}95 & 0{,}05\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M.
2. Donner la signification du nombre 0,95 dans la matrice M.
3. Vérifier que la matrice ligne $P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ correspond à l'état stable du système. En donner une interprétation.

9. *Chaîne de Markov : recherche de la distribution invariante*

E.25 On considère une chaîne $(\mathcal{X}_n)$ de Markov dans l'espace des états $\{e_1\,;\,e_2\,;\,e_3\}$ dont les évolutions, étape par étapes, des distributions sont représentées par le graphe :



1. Donner la matrice A de transition associée à ce graphe.

On note $\pi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ la matrice représentant la distribution invariante de la chaîne $(\mathcal{X}_n)$. Elle vérifie l'égalité : $\pi{\cdot}A = \pi$

2. On considère la matrice B : $B = \begin{pmatrix} -0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & -0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & -0{,}8 \end{pmatrix}$

   a. Justifier l'égalité : $\pi{\cdot}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   b. À l'aide de la calculatrice, donner le déterminant de la matrice B.

   c. Justifier l'équivalence des deux systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} -0{,}7{\cdot}x + 0{,}2{\cdot}y + 0{,}6{\cdot}z = 0 \\ 0{,}1{\cdot}x - 0{,}6{\cdot}y + 0{,}2{\cdot}z = 0 \\ 0{,}6{\cdot}x + 0{,}4{\cdot}y - 0{,}8{\cdot}z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -0{,}7{\cdot}x + 0{,}2{\cdot}y + 0{,}6{\cdot}z = 0 \\ 0{,}1{\cdot}x - 0{,}6{\cdot}y + 0{,}2{\cdot}z = 0 \\ 0{,}1{\cdot}x - 0{,}6{\cdot}y + 0{,}2{\cdot}z = 0 \end{cases}$$

   d. Que peut-on en déduire sur l'ensemble des solutions de ce système?

3. On considère la matrice C : $C = \begin{pmatrix} -0{,}7 & 0{,}1 & 1 \\ 0{,}2 & -0{,}6 & 1 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$

   a. Justifier que la matrice π vérifie : $\pi\cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

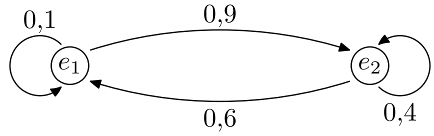
   b. Justifier : $C\cdot\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & -1{,}3 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = I_3$

   c. En déduire les coefficients de la matrice π.

E.26 On considère une chaîne de Markov $(\mathcal{X}_n)$ dont l'espace des états est $\{e_1\,;\,e_2\}$ et dont la distribution initiale est :

$$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}_0{=}e_1\big) = 0{,}3 \quad ; \quad \mathcal{P}\big(\mathcal{X}_0{=}e_2\big) = 0{,}7$$

Le graphe ci-dessous représente l'évolution des distributions, étape par étape : :



Déterminer la matrice représentant la distribution invariante de cette chaîne de Markov.

10. *Chaîne de Markov : comportement asymptotique*

E.27 On considère l'univers composé des deux états $\Omega = \{e_1\,;e_2\}$. La distribution initiale $\mathcal{X}_0$ a pour loi de probabilité :

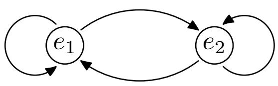
$$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}_0{=}e_1\big) = \frac{1}{3} \quad ; \quad \mathcal{P}\big(\mathcal{X}_0{=}e_2\big) = \frac{2}{3}$$

On note $(\mathcal{X}_n)$ la chaîne de Markov définit par les relations suivantes :

$$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_1)}\big(\mathcal{X}_{n+1}{=}e_1\big) = \frac{3}{5} \quad ; \quad \mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_2)}\big(\mathcal{X}_{n+1}{=}e_1\big) = \frac{2}{5}$$

$$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_1)}\big(\mathcal{X}_{n+1}{=}e_2\big) = \frac{2}{5} \quad ; \quad \mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=e_2)}\big(\mathcal{X}_{n+1}{=}e_2\big) = \frac{3}{5}$$

1. a. Compléter le graphe pondéré orienté associé à cette chaîne de Markov :



   b. Donner la matrice A de transition associée à ce graphe.

2. On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a. Justifier que M est une matrice inverse, puis donner M^{-1}.

   b. Déterminer la matrice $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ vérifiant :

$$A = M\cdot D\cdot M^{-1}$$

   c. Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'identité suivante pour tout entier naturel n :
$$A^n = M{\cdot}D^n{\cdot}M^{-1}$$

   d. En déduire que, pour tout entier naturel n, la distribution à l'étape n est définie par :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}\big(\mathcal{X}_n{=}e_1\big) & \mathcal{P}\big(\mathcal{X}_n{=}e_2\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6\times5^n}+\frac{1}{2} & \frac{1}{6\times5^n}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   e. En déduire la distribution invariante π

E.28 On considère une chaîne $(\mathcal{X}_n)$ de Markov dans l'espace des états $\{e_1\,;e_2\}$. Pour tout entier naturel n, on note π_n la distribution à l'étape n sous forme de matrice ligne :

$$\pi_n = \begin{pmatrix}\mathcal{P}(\mathcal{X}_n{=}e_1) & \mathcal{P}(\mathcal{X}_n{=}e_2)\end{pmatrix}$$

On considère l'identité $\pi_{n+1}=\pi_n\cdot A$, pour tout entier naturel n, où la matrice de transition A est définie par :

$$A = \begin{pmatrix}\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{4}{15} & \frac{11}{15}\end{pmatrix}$$

La distribution initiale est : $\pi_0 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n :
$$\pi_n = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{1}{6\times5^n} & \frac{2}{3}-\frac{1}{6\times5^n}\end{pmatrix}$$
2. En déduire la distribution invariante de cette chaîne de Markov.

11. *Etude d'un graphe probabiliste*

E.29 Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H.
Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état : "*la commande est passée auprès du fournisseur A*" ;
- H désigne l'état : "*La commande est passée auprès du fournisseur H*".

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité de l'événement : "*La semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A*" ;
- h_n la probabilité de l'événement : "*La semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur H*" ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix}a_n & h_n\end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste pour la semaine n.

La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H, est définie par :

$$M = \begin{pmatrix}0{,}95 & 0{,}05\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix} \quad ; \quad P_{n+1} = P_n\cdot M$$

1. Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M.
2. Donner la signification du nombre 0,95 dans la matrice M.
3. Vérifier que la matrice $P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ correspondant à l'état stable du système. En donner une interprétation.
4. On donne $P_0 = \begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}$ et on rappelle que :
$P_k = P_0\times M^k$ pour k entier naturel.
Déterminer la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H.