Terminale Option Experte / Congruences

1. Congruence

E.1

Définition :
Soit a et b deux entiers relatifs $(a, b \in \mathbb{Z})$ et c un entier naturel non-nul $(c \in \mathbb{N}^*)$:
$a \equiv b \pmod{c} \iff (a-b)$ multiple de c.

Vérifier la véracité de chacune des égalités suivantes :

a) $15 \equiv 27 \pmod{3}$
b) $17 \equiv 11 \pmod{4}$
c) $153 \equiv 237 \pmod{12}$
d) $-5 \equiv 8 \pmod{13}$
e) $-81 \equiv 224 \pmod{6}$
f) $37^4 \equiv 1 \pmod{4}$

E.2

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2 009 par 11.
2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.
3. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009}+2009$ par 11.

2. Opérations sur les congruences

E.3 Utiliser les congruences pour calculer les restes de la division euclidienne par 7 des entiers suivants :

a) 5^6
b) 5^{6p}, pour $p \in \mathbb{N}^*$
c) 33^{38}

E.4

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.
2. En déduire que : $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$.

3. Opérations sur les congruences et problèmes

E.5 *Dans cet exercice, on étudie la divisibilité par 11 en exploitant la congruence modulo 11 des puissances de 10.*

1. a) Vérifier que : $100 \equiv 1 \pmod{11}$.
   En déduire que : $10^4 \equiv 1 \pmod{11}$.
   b) Vérifier que : $10 \equiv -1 \pmod{11}$.
   En déduire que :
   - $10^3 \equiv -1 \pmod{11}$
   - $10^5 \equiv -1 \pmod{11}$
2. a) En utilisant l'égalité $3\,729 = 37 \times 100 + 29$ et les résultats précédents, montrer que 3 729 est divisible par 11.
   b) En utilisant la méthode précédente, étudier la divisibilité de 9 240 par 11.
3. a) En utilisant l'égalité :
   $3\,729 = 3 \times 1000 + 7 \times 100 + 2 \times 10 + 9$
   et les résultats précédents, montrer que 3729 est divisible par 11.
   b) En utilisant cette méthode, étudier la divisibilité de 9 240 par 11.
4. Étudier la divisibilité de 197 277 par 11.

E.6 On considère les entiers :
$A = 8\,387\,592\,115 \quad ; \quad B = 9\,276\,312\,516$.

1. a) Montrer que 1 000 est divisible par 8.
   b) Montrer que A est congru à 3 modulo 8.
   c) Donner l'entier naturel b strictement inférieur à 8 tel que B soit congru à b modulo 8.
2. Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à $A+B$ et à $A \cdot B$
3. a) Montrer que B^2 est divisible par 8.
   b) Montrer que A^2 n'est pas divisible par 8.
   c) Montrer que A^{100} n'est pas divisible par 8.

4. Congruence et expression

E.7 Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.

E.8 Soit n un entier relatif. Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie :

$n^2+n+3\equiv 0 \pmod{5}$ si, et seulement si, $n\equiv 1 \pmod{5}$.

E.9

1. (a) Montrer que 1999 est congru à 4 modulo 7.
   (b) Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à 2007 modulo 7.
2. Soit n un nombre entier naturel congru à 5 modulo 7.
   (a) Déterminer un nombre entier naturel congru à n^3 modulo 7.
   (b) En déduire que (n^3+1) est divisible par 7.
3. Montrer que si n est un nombre entier naturel congru à 4 modulo 7 alors (n^3-1) est divisible par 7.
4. On considère l'entier : $A=1999^3+2007^3$.
   Sans calculer A, montrer en utilisant les résultats précédents que A est divisible par 7.

5. *Etude des restes d'une expression*

E.10 Soit n un entier naturel.

1. Développer $(n+3)^4$.
2. Montrer que : $(n+3)^4 \equiv n^4+2n^2+1 \pmod{4}$
3. Étudier en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4, la divisibilité de $(n+3)^4$ par 4.

E.11 On considère l'équation $(E) : x^2+y^2\equiv 0 \pmod{3}$ où $(x\,;y)$ est un couple d'entiers relatifs.

Établir que si un couple est solution de l'équation (E) alors c'est un couple de multiple de 3.

6. *Equations*

E.12

1. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons a le reste de la division euclidienne de $8n$ par 5 ; compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
a					

   (b) Montrer que, dans $\mathbb{Z}$, l'équation $8n\equiv 4 \pmod{5}$ admet pour ensemble de solution tous les entiers relatifs dont le reste par la division euclidienne par 5 vaut 3.
   On notera cet ensemble : $\mathcal{S}=\{3+5{\cdot}k \mid k\in\mathbb{Z}\}$
2. Établir que l'équation $5n\equiv 2 \pmod{6}$ admet dans $\mathbb{Z}$ pour ensemble de solution : $\mathcal{S}=\{4+6{\cdot}k \mid k\in\mathbb{Z}\}$
3. Dans $\mathbb{Z}$, justifier que l'équation $6n\equiv 5 \pmod{4}$ n'admet aucune solution.

E.13 Soit x un entier relatif.

En étudiant les restes possibles de la division euclidienne de x par 6, résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

(a) $5{\cdot}x\equiv 2 \pmod{6}$ (b) $2{\cdot}x\equiv 3 \pmod{6}$

E.14 On considère l'ensemble : $A_7=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

1. Pour tout élément a de A_7, écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que :
   $a{\cdot}y\equiv 1 \pmod{7}$.

a	1	2	3	4	5	6
y						6

2. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation :
   $3x\equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x\equiv 4 \pmod{7}$.
3. Soit a un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a{\cdot}x\equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

7. *Puissances congru à 0*

E.15

1. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n réalisant la congruence : $6^n\equiv 0 \pmod{8}$
2. Pour tout entier naturel n, déterminer la valeur du reste de l'entier A défini ci-dessous par la division euclidienne par 8 : $A=6^n+9^n$

E.16

1. Déterminer le plus petit entier k réalisant l'équivalence :
   $6^k\equiv 0 \pmod{4}$
2. Pour tout entier naturel a, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir la congruence ci-dessous pour tout entier naturel n non-nul :
   $(a+6)^n\equiv a^n+6{\cdot}n{\cdot}a^{n-1} \pmod{4}$

8. *Puissances cycliques*

E.17

1. Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 7^n par 4 :

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

2. En déduire le reste de la division euclidienne de 7^{235} par 4.

E.18

1. Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 12^n par 5 :

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

2. Établir que l'entier $\left(12^{39}-3\right)$ est divisible par 5.

E.19

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4
3^n					
Reste de 3^n par 5					

2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $2008^{4\cdot n} \equiv 1 \pmod{5}$

3. En déduire que $2008^{2008}-31$ est divisible par 5.

E.20 Déterminer le reste de la division euclidienne de $\left(17\,159\right)^{541}$ par 7.

Indication : on utilisera la congruence : $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$

E.21 Soit n un entier naturel.

1. Trouver suivant les valeurs de n, les restes de la division de 5^n par 13.

2. En déduire que $1981^{1981}-5$ est divisible par 13.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'entier $N=31^{4n+1}+18^{4n-1}$ est divisible par 13.

E.22 On considère l'entier $N=11^{2011}$. Montrer que l'entier N est congru à 4 modulo 7.

9. *Raisonnement par récurrence*

E.23 Montrer par un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, l'entier 5^n-1 est un multiple de 4.

E.24 On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 14 \quad ; \quad u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$.

E.25 On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 14 \quad ; \quad u_{n+1} = 5\cdot u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel : $2\cdot u_n = 5^{n+2} + 3$

2. a. Justifier que pour tout entier naturel n, $2\cdot u_n$ est un multiple de 4.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $2\cdot u_n \equiv 28 \pmod{100}$

10. *Ecriture des entiers dans une base*

E.26 Un entier naturel N s'écrit $\overline{cabc}$ dans le système de numération à base cinq où a, b, c sont non nuls, c'est-à-dire :

$$N = c\times5^3 + a\times5^2 + b\times5 + c$$

où a, b, c sont des entiers tels que :

$$0 < a < 5 \quad ; \quad 0 < b < 5 \quad ; \quad 0 < c < 5$$

Ce même entier N s'écrit $\overline{aba}$ dans le système de numération à base huit.

1. Montrer que $N=65a+8b$ et en déduire que : $40a = 126c - 3b$.

2. a. Justifier que : $40a \equiv 0 \pmod{3}$. En déduire la valeur de a.

   b. Montrer que : $b \equiv 0 \pmod{2}$. Déterminer les valeurs de b et c.

   c. Donner l'écriture de l'entier N dans les bases cinq, huit et dix.

E.27 **Partie A :** Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances? Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

Partie B

On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β les chiffres de l'écriture d'un entier en base 12. Par exemple :

$\overline{\beta\alpha}^{12} = \beta\times12^2+\alpha\times12+7 = 11\times12^2+10\times12+7$

$= 1711$ en base 10

1. a. Soit N_1 l'entier s'écrivant en base 12 :
$N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

   b. Soit N_2 l'entier s'écrivant en base 10 :
$N_2 = 1131 = 1\times10^3+1\times10^2+3\times10+1$
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$N = \overline{a_n\cdots a_1a_0}^{12}$

2. a. Démontrer que $N\equiv a_0 \pmod{3}$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un entier écrit en base 12.

   b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. a. Démontrer que $N\equiv a_n+\cdots+a_1+a_0 \pmod{11}$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un entier écrit en base 12.

   b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un entier N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

11. *Cours*

E.28

Rappel : Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a\equiv b \pmod{7}$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a=b+7k$.

Cette question constitue une restitution organisée de connaissances :

1. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
Démontrer que :
Si $a\equiv b \pmod{7}$ et $c\equiv d \pmod{7}$
alors $a\cdot c\equiv b\cdot d \pmod{7}$.

2. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls.
Si $a\equiv b \pmod{7}$ alors pour tout entier naturel n, $a^n\equiv b^n \pmod{7}$.

E.29 Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un entier naturel non-nul

Montrer que s'il existe un entier naturel n tel que $a^n\equiv0 \pmod{p}$ alors pour tout entier naturel k, on a l'implication : $k\geqslant n \implies a^k\equiv0 \pmod{p}$

12. *Exercices non-classés*

E.30

1. Déterminer la division euclidienne de 1038 par 17.

2. En étudiant le carré $(61\times17+1)^2$, déterminer le reste de la division euclidienne de 1038^2 par 17.

3. Pour tout entier naturel n, en déduire une conjecture sur la division euclidienne de 1038^n par 17.

E.31 *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a\neq0$.

On considère l'entier $N=a\times10^3+b$. On rappelle qu'en base 10 cet entier s'écrit sous la forme :

$N = \overline{a00b}$

On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

1. Vérifier que : $10^3\equiv-1 \pmod{7}$

2. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

E.32 On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1. Déterminer x pour que :

   a. A soit divisible par six ;

   b. A soit divisible par cinq.
En déduire qu'il existe x tel que A soit divisible par trente.

2. On donne à x la valeur zéro. Déterminer l'écriture décimale de A. Quel est le nombre de diviseurs positifs de A? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec trois?

E.33

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11? Justifier.

2. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{4} par 5? Justifier.

3. En déduire que :
   $6^{40}\equiv 1 \pmod{11}$ et $6^{40}\equiv 1 \pmod{5}$.

4. Démontrer que $6^{40}-1$ est divisible par 55.

E.34

1. Soit n un entier naturel. Exprimer le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4.

2. Soit a et b deux entiers. Établir la propriété suivante :
   "Si a^2+b^2 est un entier divisible par 8 alors a et b sont des entiers pairs"

E.35 Pour chacune des deux propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

Pour tout entier naturel n non nul :

1. "$5^{6n+1}+2^{3n+1}$ *est divisible par* 5".

2. "$5^{6n+1}+2^{3n+1}$ *est divisible par* 7".

E.36 Pour chaque question, préciser si la proposition faite est vraie ou fausse :

1. Pour tout entier naturel n, on a :
   $2^{3n}-1\equiv 0 \pmod{7}$

2. Soit x un entier naturel.
   Si $x^2+x\equiv 0 \pmod{12}$ alors $x\equiv 0 \pmod{4}$