Terminale Option Experte / Congruences

1. Congruence

E.1

Définition :
Soit a et b deux entiers relatifs $(a, b \in \mathbb{Z})$ et c un entier naturel non-nul $(c \in \mathbb{N}^*)$:
$$a \equiv b \pmod{c} \iff (a-b) \text{ multiple de } c$$

Vérifier la véracité de chacune des égalités suivantes :

(a) $15 \equiv 27 \pmod{3}$ (b) $17 \equiv 11 \pmod{4}$

(c) $153 \equiv 237 \pmod{12}$ (d) $-5 \equiv 8 \pmod{13}$

(e) $-81 \equiv 224 \pmod{6}$ (f) $37^4 \equiv 1 \pmod{4}$

E.2

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2 009 par 11.
2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.
3. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.

2. Opérations sur les congruences

E.3 Utiliser les congruences pour calculer les restes de la division euclidienne par 7 des entiers suivants :

(a) 5^6 (b) 5^{6p}, pour $p \in \mathbb{N}^*$ (c) 33^{38}

E.4

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.
2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$

3. Opérations sur les congruences et problèmes

E.5 *Dans cet exercice on étudie la divisibilité par 11 en exploitant la congruence modulo 11 des puissances de 10*

1. (a) Vérifier que : $100 \equiv 1 \pmod{11}$.
   En déduire que : $10^4 \equiv 1 \pmod{11}$.
   (b) Vérifier que : $10 \equiv -1 \pmod{11}$.
   En déduire que :
   - $10^3 \equiv -1 \pmod{11}$
   - $10^5 \equiv -1 \pmod{11}$
2. (a) En utilisant l'égalité $3729 = 37 \times 100 + 29$ et les résultats précédents, montrer que 3729 est divisible par 11.
   (b) En utilisant la méthode précédente, étudier la divisibilité de 9240 par 11.
3. (a) En utilisant l'égalité :
   $3729 = 3 \times 1000 + 7 \times 100 + 2 \times 10 + 9$
   et les résultats précédents, montrer que 3729 est divisible par 11.
   (b) En utilisant cette méthode, étudier la divisibilité de 9240 par 11.
4. Étudier la divisibilité de 197 277 par 11.

E.6 On considère les entiers :

$A = 8\,387\,592\,115$; $B = 9\,276\,312\,516$

1. (a) Montrer que 1 000 est divisible par 8.
   (b) Montrer que A est congru à 3 modulo 8.
   (c) Donner l'entier naturel b strictement inférieur à 8 tel que B soit congru à b modulo 8.
2. Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à $A+B$ et à $A \cdot B$
3. (a) Montrer que B^2 est divisible par 8.
   (b) Montrer que A^2 n'est pas divisible par 8.
   (c) Montrer que A^{100} n'est pas divisible par 8.

4. Congruence et expression

E.7 Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.

E.8 Soit n un entier relatif. Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie :

$n^2+n+3\equiv 0 \pmod{5}$ si, et seulement si, $n\equiv 1 \pmod{5}$.

E.9

1. a. Montrer que 1999 est congru à 4 modulo 7.
   b. Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à 2007 modulo 7.
2. Soit n un nombre entier naturel congru à 5 modulo 7.
   a. Déterminer un nombre entier naturel congru à n^3 modulo 7.
   b. En déduire que (n^3+1) est divisible par 7.
3. Montrer que si n est un nombre entier naturel congru à 4 modulo 7 alors (n^3-1) est divisible par 7.
4. On considère l'entier : $A=1999^3+2007^3$.
Sans calculer A, montrer en utilisant les résultats précédents que A est divisible par 7.

5. *Etude des restes d'une expression*

E.10 Soit n un entier naturel.

1. Développer $(n+3)^4$.
2. Montrer que : $(n+3)^4 \equiv n^4+2n^2+1 \pmod{4}$
3. Étudier en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4, la divisibilité de $(n+3)^4$ par 4.

E.11 On considère l'équation (E) : $x^2+y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ où $(x\,;y)$ est un couple d'entiers relatifs.

Établir que si un couple est solution de l'équation (E) alors c'est un couple de multiple de 3.

6. *Equations*

E.12

1. a. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons a le reste de la division euclidienne de $8n$ par 5 ; compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
a					

   b. Montrer que, dans $\mathbb{Z}$, l'équation $8n\equiv 4 \pmod{5}$ admet pour ensemble de solution tous les entiers relatifs dont le reste par la division euclidienne par 5 vaut 3.
   On notera cet ensemble : $\mathcal{S}=\{3+5\cdot k \mid k\in\mathbb{Z}\}$
2. Établir que l'équation $5n \equiv 2 \pmod{6}$ admet dans $\mathbb{Z}$ pour ensemble de solution : $\mathcal{S}=\{4+6\cdot k \mid k\in\mathbb{Z}\}$
3. Dans $\mathbb{Z}$, justifier que l'équation $6n\equiv 5 \pmod{4}$ n'admet aucune solution.

E.13 Soit x un entier relatif.

En étudiant les restes possibles de la division euclidienne de x par 6, résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a. $5\cdot x \equiv 2 \pmod{6}$ b. $2\cdot x \equiv 3 \pmod{6}$

E.14 On considère l'ensemble : $A_7=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

1. Pour tout élément a de A_7, écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que :
$a\cdot y \equiv 1 \pmod{7}$.

a	1	2	3	4	5	6
y						6

2. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation :
$3x\equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x\equiv 4 \pmod{7}$.
3. Soit a un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a\cdot x\equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

7. *Puissances congru à 0*

E.15

1. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n réalisant la congruence : $6^n \equiv 0 \pmod{8}$
2. Pour tout entier naturel n, déterminer la valeur du reste de l'entier A défini ci-dessous par la division euclidienne par 8 : $A=6^n+9^n$

E.16

1. Déterminer le plus petit entier k réalisant l'équivalence :
$6^k \equiv 0 \pmod{4}$
2. Pour tout entier naturel a, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir la congruence ci-dessous pour tout entier naturel n non-nul :
$(a+6)^n \equiv a^n + 6\cdot n\cdot a^{n-1} \pmod{4}$

8. *Puissances cycliques*

E.17

1. Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 7^n par 4 :

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

2. En déduire le reste de la division euclidienne de 7^{235} par 4.

E.18

1. Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 12^n par 5 :

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

2. Établir que l'entier $\left(12^{39}-3\right)$ est divisible par 5.

E.19

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4
3^n					
Reste de 3^n par 5					

2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a :
$2008^{4\cdot n} \equiv 1 \pmod{5}$
3. En déduire que $2008^{2008}-31$ est divisible par 5.

E.20 Déterminer le reste de la division euclidienne de $\left(17\,159\right)^{541}$ par 7.

Indication : on utilisera la congruence : $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$

E.21 Soit n un entier naturel.

1. Trouver suivant les valeurs de n, les restes de la division de 5^n par 13.
2. En déduire que $1981^{1981}-5$ est divisible par 13.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'entier $N=31^{4n+1}+18^{4n-1}$ est divisible par 13.

E.22 ⚠ On considère l'entier $N=11^{2011}$. Montrer que l'entier N est congru à 4 modulo 7.

9. *Raisonnement par récurrence*

E.23 Montrer par un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, l'entier 5^n-1 est un multiple de 4.

E.24 ⚠ On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 14 \quad ; \quad u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$.

E.25 ⚠ On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 14 \quad ; \quad u_{n+1} = 5\cdot u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel :
$2\cdot u_n = 5^{n+2} + 3$
2. a. Justifier que pour tout entier naturel n, $2\cdot u_n$ est un multiple de 4.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $2\cdot u_n \equiv 28 \pmod{100}$

10. *Ecriture des entiers dans une base*

E.26 Un entier naturel N s'écrit $\overline{cabc}$ dans le système de numération à base cinq où a, b, c sont non nuls, c'est-à-dire :
$N = c\times 5^3 + a\times 5^2 + b\times 5 + c$
où a, b, c sont des entiers tels que :
$0 < a < 5 \quad ; \quad 0 < b < 5 \quad ; \quad 0 < c < 5$

Ce même entier N s'écrit $\overline{aba}$ dans le système de numération à base huit.

1. Montrer que $N=65a+8b$ et en déduire que :
$40a = 126c - 3b.$
2. a. Justifier que : $40a \equiv 0 \pmod{3}$.
   En déduire la valeur de a.
   b. Montrer que : $b \equiv 0 \pmod{2}$.
   Déterminer les valeurs de b et c.
   c. Donner l'écriture de l'entier N dans les bases cinq, huit et dix.

E.27 **Partie A :** Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances? Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

Partie B

On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β les chiffres de l'écriture d'un entier en base 12. Par exemple :

$\overline{\beta\alpha}^{12} = \beta\times12^2+\alpha\times12+7 = 11\times12^2+10\times12+7$
$= 1711$ en base 10

1. a. Soit N_1 l'entier s'écrivant en base 12 :
   $N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$
   Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

   b. Soit N_2 l'entier s'écrivant en base 10 :
   $N_2 = 1131 = 1\times10^3+1\times10^2+3\times10+1$
   Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :
$N = \overline{a_n\cdots a_1a_0}^{12}$

2. a. Démontrer que $N\equiv a_0 \pmod{3}$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un entier écrit en base 12.

   b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. a. Démontrer que $N\equiv a_n+\cdots+a_1+a_0 \pmod{11}$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un entier écrit en base 12.

   b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un entier N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

11. *Cours*

E.28

Rappel : Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a\equiv b \pmod{7}$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a=b+7k$.

Cette question constitue une restitution organisée de connaissances :

1. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
   Démontrer que :
   Si $a\equiv b \pmod{7}$ et $c\equiv d \pmod{7}$
   alors $a\cdot c\equiv b\cdot d \pmod{7}$.

2. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls. Si $a\equiv b \pmod{7}$ alors pour tout entier naturel n, $a^n\equiv b^n \pmod{7}$.

E.29 Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un entier naturel non-nul

Montrer que s'il existe un entier naturel n tel que $a^n\equiv 0 \pmod{p}$ alors pour tout entier naturel k, on a l'implication : $k\geqslant n \implies a^k\equiv 0 \pmod{p}$

12. *Exercices non-classés*

E.30

1. Déterminer la division euclidienne de 1038 par 17.
2. En étudiant le carré $(61\times17+1)^2$, déterminer le reste de la division euclidienne de 1038^2 par 17.
3. En déduire une conjecture sur, pour tout entier naturel n, la division euclidienne de 1038^n par 17.

E.31 *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a\neq0$.

On considère l'entier $N=a\times10^3+b$. On rappelle qu'en base 10 cet entier s'écrit sous la forme :
$N = \overline{a00b}$

On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

1. Vérifier que : $10^3\equiv-1 \pmod{7}$
2. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

E.32 On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1. Déterminer x pour que :
   a. A soit divisible par six ;
   b. A soit divisible par cinq.
   En déduire qu'il existe x tel que A soit divisible par trente.
2. On donne à x la valeur zéro. Déterminer l'écriture décimale de A. Quel est le nombre de diviseurs positifs de A? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec trois?

E.33

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11? Justifier.

2. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5? Justifier.

3. En déduire que :
   $6^{40} \equiv 1 \pmod{11}$ et $6^{40} \equiv 1 \pmod{5}$.

4. Démontrer que $6^{40}-1$ est divisible par 55.

E.34

1. Soit n un entier naturel. Exprimer le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4.

2. Soit a et b deux entiers. Établir la propriété suivante :

   “Si a^2+b^2 est un entier divisible par 8 alors a et b sont des entiers pairs”

E.35 Pour chacune des deux propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

Pour tout entier naturel n non nul :

1. “$5^{6n+1}+2^{3n+1}$ *est divisible par* 5”.

2. “$5^{6n+1}+2^{3n+1}$ *est divisible par* 7”.

E.36 Pour chaque question, préciser si la proposition faite est vraie ou fausse :

1. Pour tout entier naturel n, on a :
   $2^{3n}-1 \equiv 0 \pmod{7}$

2. Soit x un entier naturel.
   Si $x^2+x \equiv 0 \pmod{12}$ alors $x \equiv 0 \pmod{4}$