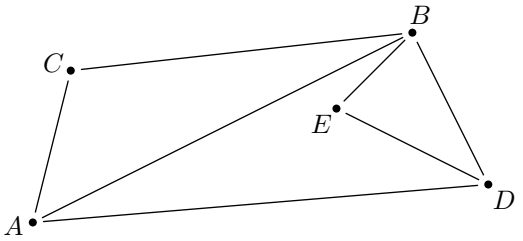
Terminale Option Experte / Graphes et matrices

1. Ordre et degré

E.1 On considère le graphe ci-dessous :



1. Donner l'ordre du graphe.
2. Compléter le tableau ci-dessous :

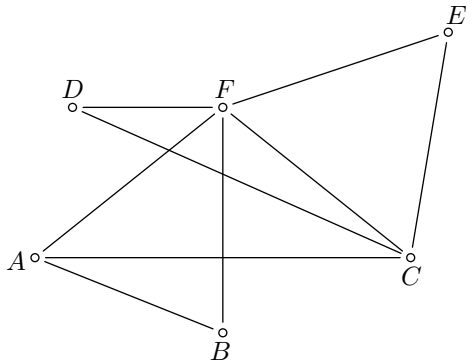
Point	A	B	C	D	E
Degré du point					

3. Dans le tableau à double entrée ci-dessous, mettre une croix dans une case si les deux sommets correspondants sont adjacents :

	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

2. Graphe simple

E.2 On considère le graphe ci-dessous :



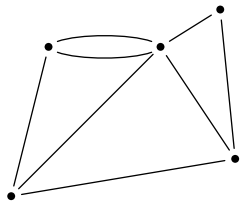
1. Quel est l'ordre de ce graphe?
2. Compléter le tableau ci-dessous :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré du sommet						

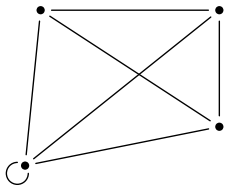
3. La somme des degrés de tous les sommets est-elle égale au double du nombre d'arêtes?
4. Ce graphe est-il simple?

E.3 Justifier que chacun des graphes ci-dessous n'est pas un graphe simple :

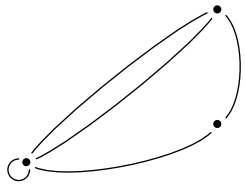
a



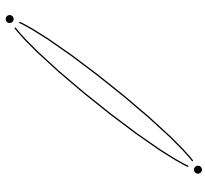
b



c

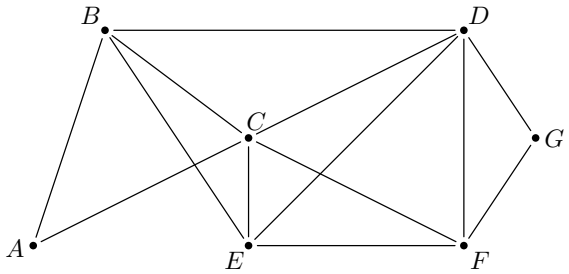


c



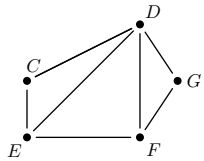
3. Sous-graphe

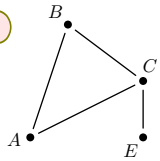
E.4 On considère le graphe ci-dessous :

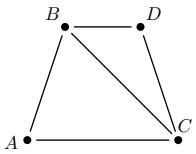


CC BY-NC

Parmi les graphes ci-dessous, lesquels sont des sous-graphes du graphe principal?

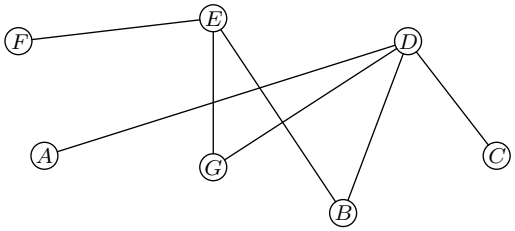
a 

b 

c 

4. *Sous graphe stable*

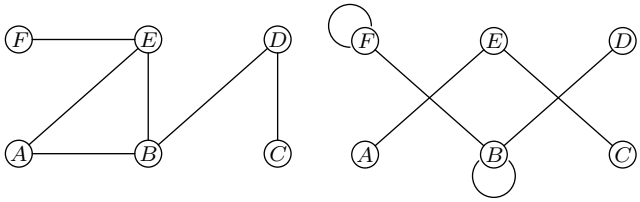
E.5 Une société de gardiennage accueille actuellement sept chiens représentés dans le graphe ci-dessous par les sommets du graphe ; les arêtes représentent les chiens ne pouvant pas être enfermés dans une même cage.



1. Quel est le plus grand sous-graphe stable contenant un maximum de sommets?
2. Combien de cages au minimum faut-il pour garder ces sept chiens sans risquer des confrontations entre ces chiens?

5. *Complet et connexe*

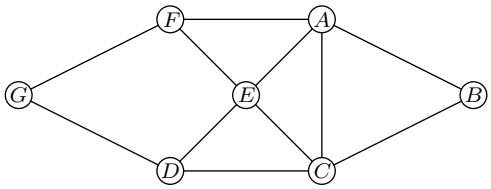
E.6 On considère les deux graphes ci-dessous :



Préciser si ces graphes sont connexes ou pas.

6. *Chaine et cycle*

E.7 On considère le graphe ci-dessous :



Parmi les listes ordonnées ci-dessous, lesquelles forment une chaine de ce graphe :

1. $A - E - F - E - G - D$
2. $E - F - A - B - C$
3. $D - A - C - D$
4. $D - C - E - A - F - E$

7. *Introduction aux matrices*

E.8 On appelle "*matrice magique*" toute matrice où les sommes des coefficients par ligne, par colonne , par la diagonale principale et par la seconde diagonale donnent toutes le même résultat.

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont des matrices magiques :

a $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

 BY-NC

E.9 On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Pour mettre en évidence les coefficients de la matrice, on note : $A = (a_{ij})$

1. Donner la valeur des coefficients de la matrice suivants :
   a. a_{23} b. a_{34} c. a_{11} d. a_{31}
2. Déterminer la valeur des calculs suivants :
   a. $a_{11} + a_{21}$ b. $a_{32} \times a_{14}$ c. $(a_{24})^2$
3. Citer l'ensemble des couples de coefficients de la matrice opposés entre eux.

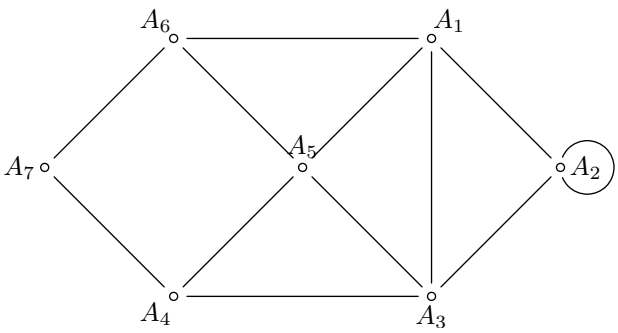
8. *Matrice adjacente d'un graphe non-orienté*

E.10

Définition : soit G un graphe à n sommets $(n \in \mathbb{N}^*)$. On appelle **matrice d'adjacence du graphe G** la matrice $M = (m_{ij})$ carrée d'ordre n dont les coefficients ont pour valeur :

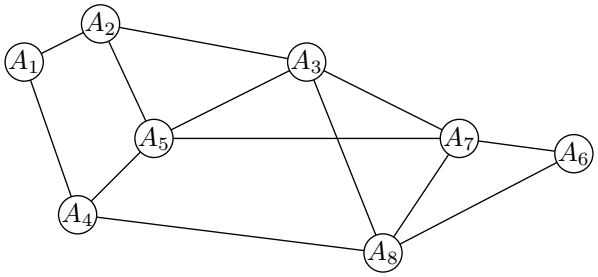
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } A_i \text{ est relié au sommet } A_j \text{ par une arête} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } i,j \in [\![1;n]\!].$$

Le graphe ci-dessous représente 7 villes reliées par des routes :



Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.

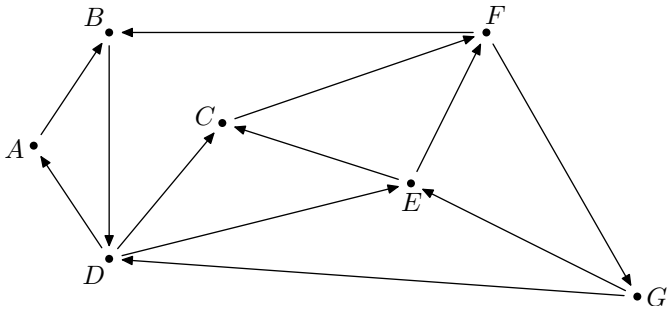
E.11 Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les huit villes notées de A_1 à A_8, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes *(une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête)* :



Donner l'expression de la matrice M d'adjacence du graphe $\mathcal{G}$.

9. *Matrice adjacente d'un graphe orienté*

E.12 Donner la matrice d'adjacence du graphe ci-dessous :



10. *Introduction aux opérations sur les matrices*

E.13

Indication : au cours de l'exercice, une matrice $M = (m_{ij})$ aura son coefficient m_{ij} qui exprimera le "*prix du produit j chez le fournisseur i.*"

Une entreprise recense le prix en euros des produits qu'elle utilise en lien avec ses différents fournisseurs. Il obtient le tableau à double entrée suivant :

CC BY-NC

	Produit 1	Produit 2	Produit 3
Fournisseur 1	3,50	2,80	1,75
Fournisseur 2	3,25	3	1,70

1. Écrire la matrice A reliée à ces prix..
2. Les fournisseurs décident d'une augmentation sur leurs produits dont les montants sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Produit 1	Produit 2	Produit 3
Fournisseur 1	0,50	0,20	0,25
Fournisseur 2	0,25	0	0,3

   Écrire la matrice B correspondante à ces augmentations.
3. Écrire la matrice C correspond aux nouveaux prix de ces produits chez chacun des fournisseurs.

E.14 Une entreprise se fournit en matière première dans deux pays différents.

On considère les deux tableaux suivants :

	Alu M1	Bois M2	Fer M3
Pays 1	25	14	12
Pays 2	23	11	11

Prix des matières premières

	Alu M1	Bois M2	Fer M3
Pays 1	3	2	1
Pays 2	2	3	1

Prix du transport

1. a. Écrire la matrice $A=\left(a_{ij}\right)_{ij}$ où le coefficient a_{ij} représente "*le prix du matériau j dans le pays i*".
   b. Écrire la matrice $B=\left(b_{ij}\right)_{ij}$ où le coefficient b_{ij} représente "*le prix de transport du matériau j dans le pays i*".
   c. Écrire la matrice $C=\left(c_{ij}\right)_{ij}$ où le coefficient c_{ij} représente "*le prix d'achat du matériau j dans le pays i*".
2. Pour entamer sa production, l'entreprise a besoin de 2 unités d'Aluminium, de 1 unité de bois et de 3 unités de Fer. On représente ces données dans la matrice $D=\left(d_{ij}\right)$ donnée ci-dessous : $D=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$
   a. Donner une interprétation du nombre :
   $c_{11}\times d_{11}+c_{12}\times d_{21}+c_{31}\times d_{31}$
   b. Déterminer le prix total de ses achats lorsque l'entreprise se fournit dans le pays 2?

CC BY-NC