Terminale Option Experte / Nombres complexes, modules et arguments

1. Rappel de trigonométrie

E.1 Soit α un nombre réel. Simplifier les écritures suivantes :

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ b) $\sin\left(\alpha+3\cdot\pi\right)$

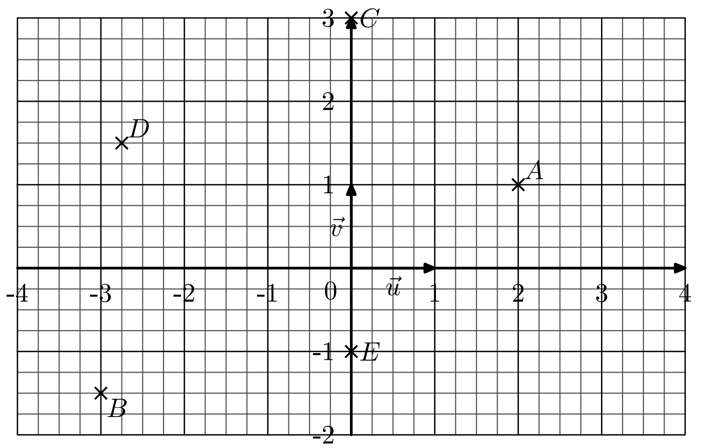
c) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ d) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

E.2 Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Représentation graphique et écriture algébrique

E.3 On considère le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct et les cinq points représentés ci-dessous :



1) Déterminer les écritures algébriques des affixes des points A, B, C, D, E.

2) Placer dans le plan les points F, G, H et I d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4 définies par :

$$z_1=3-\text{i} \quad ; \quad z_2=\frac{3}{2}\cdot\text{i}$$

$$z_3=-\frac{7}{4}+2\cdot\text{i} \quad ; \quad z_4=\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\cdot\text{i}$$

3) Déterminer l'affixe du milieu du segment $[EF]$.

3. Module d'un nombre complexe

E.4 Déterminer le module des nombres complexes suivants :

a) $1-2\cdot\text{i}$ b) $-5\cdot\text{i}$ c) $(3-2\cdot\text{i})(2+\text{i})$

4. Géométrie et module

E.5 Dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A=1+3\cdot\text{i} \quad ; \quad z_B=-\sqrt{2}+2\cdot\text{i} \quad ; \quad z_C=\frac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+2\right)$$

Soit I le point du plan d'affixe $z_I=2\cdot\text{i}$

Montrer que les points A, B, C appartiennent à un même cercle de centre I. Préciser le rayon de ce cercle.

5. Relation $|z|^2=z\cdot\overline{z}$

E.6 Pour tout nombre complexe z, on définit le nombre complexe z' par :

$$z'=\frac{(3+4\cdot\text{i})\cdot z+5\cdot\overline{z}}{6}$$

(1) Pour tout nombre complexe z, établir l'égalité :
$$\frac{z'-z}{1+2\cdot\mathrm{i}} = \frac{z+\overline{z}}{6} + \mathrm{i}\cdot\frac{z-\overline{z}}{3}$$

(2) En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{1+2\cdot\mathrm{i}}$ est un nombre réel.

6. Module : propriétés algébriques

E.7 Établir l'égalité suivante pour tout nombre complexe z non nul : $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{\left(z^2-1\right)} = -\overline{z}^2\cdot\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$

7. Modules et équations cartésiennes

E.8 On considère le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct :

(1) Soit z un nombre complexe solution de l'équation (E) :
(E) : $|z-2+\mathrm{i}| = 5$
On note M l'image du nombre complexe z

(a) Traduire l'équation (E) en termes de distance.

(b) Justifier que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation (E) est un cercle. Préciser son centre et son rayon.

(c) Soit $a+\mathrm{i}\cdot b$ l'écriture algébrique de l'affixe du point M ; déterminer une relation sur a et b caractérisant la relation (E).

(2) Soit z un nombre complexe solution de l'équation (F) :
(F) : $|z+\mathrm{i}| = |z+1-2\cdot\mathrm{i}|$
On note M l'image du nombre complexe z

(a) Traduire l'équation (F) en termes de distance.

(b) Justifier que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation (F) est une droite. Préciser sa nature.

(c) Soit $a+\mathrm{i}\cdot b$ l'écriture algébrique de l'affixe du point M ; déterminer une relation sur a et b caractérisant la relation (E).

8. Ensemble $\mathbb{U}$

E.9

Définition : on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z| = 1$.

On peut noter : $\mathbb{U}=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;|z|=1\right\}$; $\mathbb{U}\subset\mathbb{C}$

(1) Justifier que les nombres complexes ci-dessous appartiennent à $\mathbb{U}$:

(a) $z_1 = -\mathrm{i}$ (b) $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\mathrm{i}$ (c) $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i$

(2) Soit z et z' deux nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$, montrer que le produit $z\cdot z'$ appartient à $\mathbb{U}$.

(3) Soit z un élément de $\mathbb{U}$, montrer que les trois expressions ci-dessous définissent un nombre complexe appartenant à $\mathbb{U}$:

(a) $-z$ (b) $\frac{1}{z}$ (c) z^2

(4) Montrer que, pour tout nombre complexe z $(z\in\mathbb{C})$, le nombre complexe $\frac{z}{|z|}$ appartient à $\mathbb{U}$.

E.10 Établir que les nombres complexes ci-dessous appartiennent à $\mathbb{U}$:

(a) $z_1 = \frac{1-7\cdot\mathrm{i}}{-5+5\cdot\mathrm{i}}$ (b) $z_2 = \frac{2-9\cdot\mathrm{i}}{-6+7\cdot\mathrm{i}}$ (c) $z_3 = \frac{4+7\cdot\mathrm{i}}{8-\mathrm{i}}$

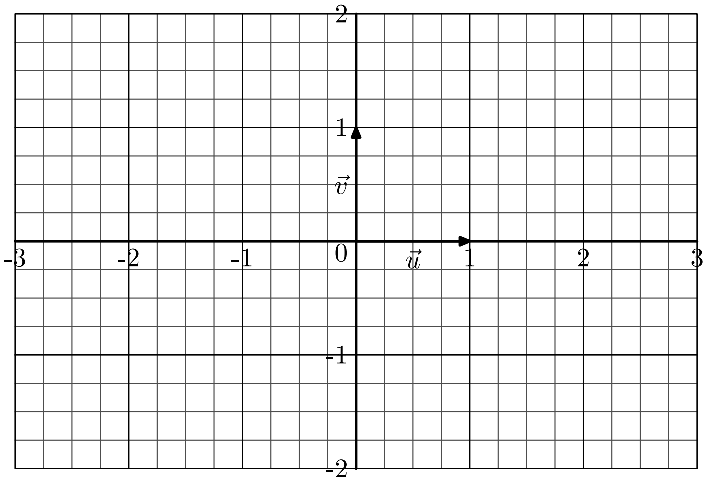
9. Argument dans l'ensemble $\mathbb{U}$

E.11

Définition : On considère le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct.
Pour tout nombre complexe z appartenant à $\mathbb{U}$, on appelle **argument de z** la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ où M est l'image du point z.

(1) Dans la représentation ci-dessous du plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct, placer les points M_1, M_2, M_3 appartenant au cercle trigonométrique et dont les arguments respectifs des affixes de ces points ont pour valeurs :

(a) $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ (b) $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$ (c) $\theta_3 - \frac{2\pi}{3}$



Proposition : dans le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$ orthonormé direct. Le point M appartenant au cercle trigonométrique dont l'affixe z a pour argment θ admet pour écriture algébrique :
$$z = \cos\theta + \mathrm{i}\cdot\sin\theta$$

(2) Donner les écritures algébriques des affixes des points M_1, M_2, M_3 définis à la question (1).

10. *Argument et angles remarquables*

E.12

Définition : on considère le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$ orthonormé direct.
Soit z un nombre complexe non-nul, on appelle **argument de** z la valeur de l'argument du nombre complexe $\dfrac{z}{|z|}$

Déterminer les arguments des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ (b) $z_2 = -3 + 3\cdot\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}$ (c) $z_3 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$

11. *Argument et valeur approchée*

E.13 Pour chacun des nombres complexes ci-dessous, déterminer la valeur approchée de leur argument au centième de radian près.

(a) $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ (b) $z_2 = -3 - 2\cdot\mathrm{i}$ (c) $z_3 = 1 - 2\cdot\mathrm{i}$

E.14 On considère les nombres complexes ci-dessous :

$$z_1 = 1 + 2\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_2 = 5 - 2\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_3 = -1 - 2\cdot\mathrm{i}$$

(1) Déterminer le module de chacun des nombres complexes ci-dessus.

(2) Déterminer, au centième de radian près, la valeur de l'argument de chacun des nombres complexes ci-dessus.

12. *Ecriture trigonométrique*

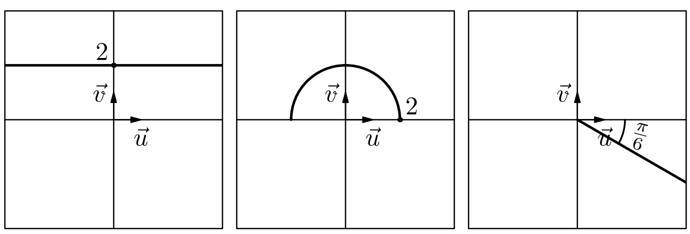
E.15 Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes z_5 et z_6 non-nuls définis par :

(a) $|z_5| = 5 \quad ; \quad \arg(z_5) = -\dfrac{\pi}{3}$

(b) $|z_6| = 2 \quad ; \quad \arg(z_6) = -\dfrac{\pi}{2}$

13. *Module, argument et lieux géométriques*

E.16 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$ orthonormé et direct.
Pour chacune des parties du plan représentées ci-dessous, décrire ce sous-ensemble de $\mathbb{C}$ en utilisant l'écriture algébrique, le module, l'argument des affixes de leurs points.



E.17 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$ orthonormé direct. Décrire l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie les conditions suivantes :

(a) $|z| = 1$ (b) $|z| \leqslant 3$ (c) $1 \leqslant |z| \leqslant 2$

(d) $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$ (e) $\big|\arg(z)\big| = \dfrac{\pi}{4}$

14. *Lieux géométrique*

E.18 On considère les trois ensembles, définis ci-dessous, de couples de réels :

- $\mathcal{E}_1 = \big\{(x\,;y) \mid 2{\cdot}x+y-1=0\big\}$
- $\mathcal{E}_2 = \big\{(x\,;y) \mid x^2+y^2-2{\cdot}x+4{\cdot}y-4=0\big\}$
- $\mathcal{E}_3 = \big\{(x\,;y) \mid x{\cdot}y+2{\cdot}y=0\big\}$

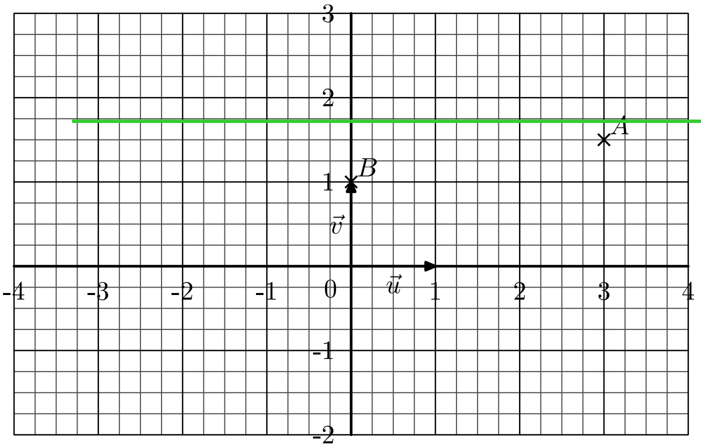
On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé direct. Donner pour chacun des trois ensembles ci-dessus :

- la nature de leur représentation dans le plan,
- des éléments caractérisants leur représentation.

E.19 À tout nombre complexe z, on associe un nombre complexe z' définit par :
$$z' = z^2 + 4{\cdot}z + 3$$
Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des nombres complexes z tel que z' soit un nombre réel.

15. *Transformation du plan*

E.20 On considère le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$ orthonormé direct ainsi que les points A et B représentés ci-dessous :



On note z_A et z_B les affixes respectives des points A et B.

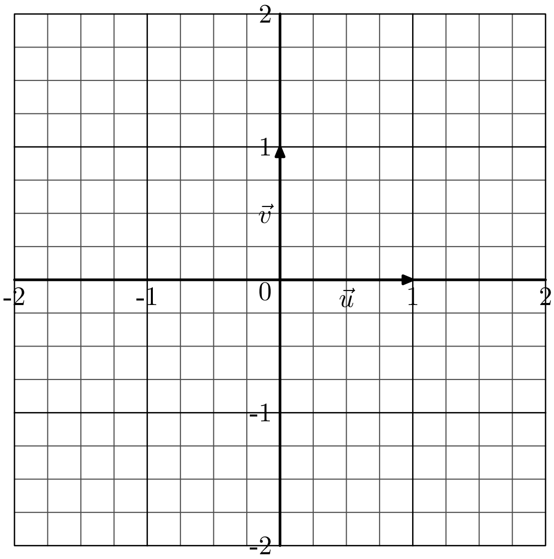
1. Donner les écritures algébriques des affixes des points A, B.
2. (a) Placer le point C d'affixe $-z_A$.
   (b) Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en C?
3. (a) Placer le point D d'affixe $\overline{z_A}$.
   (b) Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en D?
4. (a) Placer le point E d'affixe $-\overline{z_A}$.
   (b) Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en E?
5. (a) Placer le point F d'affixe $\dfrac{1}{2}{\cdot}z_A$.
   (b) Que peut-on dire de la position du point F?
6. (a) Placer le point G d'affixe $z_A+\big(-2-2{\cdot}\mathrm{i}\big)$.
   (b) Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en G?
7. On considère le point H d'affixe z_H vérifiant l'égalité :
   $$z_H - z_B = \frac{1}{2}{\cdot}\big(z_A - z_B\big)$$
   (a) En résolvant l'équation, déterminer l'écriture algébrique de l'affixe z_H du point H.
   (b) Que peut-on de la position du point H?

16. *Transformation du plan et lieu géométrique*

E.21 À tout nombre complexe z tel que $z \neq 2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z+3}{z-1}$

1. On note $x+\mathrm{i}{\cdot}y$, où $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, l'écriture algébrique du nombre complexe z.
   Donner l'écriture algébrique du nombre z', associé à z, en fonction de x et de y.
2. Dans le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$ orthonormé direct :
   (a) On considère l'équation cartésienne :
   $$(E) : \ x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$$
   Justifier que, dans le plan, l'ensemble des solutions de (E) est le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(-1\,;0)$ et de rayon 2.
   (b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que le nombre complexe z' associé soit un imaginaire pur.

E.22 ⚠ On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et on considère le plan complexe est muni d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé direct.



On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe : $f(z) = z^2 + 2{\cdot}z + 9$

1. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $\left|f(z) - 8\right| = 3$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\,;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.

2. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}{\cdot}y$ où x et y sont des nombres réels.

   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est :
   $x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}{\cdot}(2{\cdot}x{\cdot}y + 2{\cdot}y)$

   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites (d_1) et (d_2) dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique en traçant ces droites.

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

17. *Suites*

E.23 ⚠ On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :
$z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i} \quad ; \quad z_{n+1} = (1 + \mathrm{i}){\cdot}z_n$

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

E.24 ⚠ Le plan complexe est muni d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad ; \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}{\cdot}\mathrm{i}\right){\cdot}z_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme trigonométrique du nombre complexe : $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}{\cdot}\mathrm{i}$.
2. Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. Déterminer, en fonction de n, la mesure du segment $[A_nA_{n+1}]$.

18. *Exercices non-classés*

E.25 ⚠ Le plan complexe est rapporté à un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé direct. On désigne par P, Q et R les points d'affixes respectives :

$$z_P = \frac{3}{2}{\cdot}(1 + \mathrm{i}) \quad ; \quad z_Q = \frac{3}{2}{\cdot}(1 - \mathrm{i}) \quad ; \quad z_R = -2{\cdot}\mathrm{i}{\cdot}\sqrt{3}$$

On note S le symétrique du point R par rapport au point Q.

Vérifier que l'affixe z_S du point S est : $z_S = 3 + \mathrm{i}{\cdot}(2{\cdot}\sqrt{3} - 3)$