Terminale Option Experte / Nombres complexes et équations polynomiales

1. Introduction aux équations du second degré dans $\mathbb{C}$

E.1

1. Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation $z^2+1=0$.
   a. Vérifier que le nombre complexe $z_1=\mathrm{i}$ est une solution de cette équation.
   b. Proposer une autre solution de cette équation.
   c. Que peut-on dire de ces deux racines?
2. Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation $2{\cdot}z^2-2{\cdot}z+1=0$.
   a. Vérifier que les deux nombres complexes :
   $z_3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}{\cdot}\mathrm{i}$; $z_4=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}{\cdot}\mathrm{i}$
   b. Que peut-on dire de ces deux racines de l'équation?

E.2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
   $x^2+x+1=0$
2. On considère le nombre complexe $j=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}{\cdot}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   a. Déterminer l'écriture algébrique des deux nombres complexes : j^2 ; j^3
   b. Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes suivants : $1+j+j^2$; $1+\overline{j}+\overline{j}^{\,2}$
   c. Dans $\mathbb{C}$, de quelle équation du second degré, les nombres j et $\overline{j}$ sont-ils solutions?

E.3 Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation : $z^2+z+1=0$

1. Soit z une solution de cette équation admettant pour écriture algébrique $a+\mathrm{i}{\cdot}b$ où $a,b\in\mathbb{R}$.

   Montrer que les deux nombres réels a et b vérifient le système d'équations :
   $$\begin{cases} a^2+a+1-b^2 = 0 \\ 2{\cdot}a{\cdot}b+b = 0 \end{cases}$$
2. a. En déduire que cette équation admet deux solutions dont on donnera les écritures algébriques.
   b. Que peut-on dire des deux solutions de cette équation?

2. Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

E.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré suivantes :

a. $z^2-3{\cdot}z+4=0$　　b. $z^2-4{\cdot}z+4=0$

c. $3{\cdot}z^2+3{\cdot}z+2=0$　　d. $z^2-4{\cdot}z-1=0$

E.5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $2z^2+2z+1=0$　　b. $-z^2+2z-3=0$

c. $z^2+3z+3=0$　　d. $-z^2-3z-2=0$

E.6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2{\cdot}z^2-6{\cdot}z+9=0$

E.7 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2+4{\cdot}Z+16=0$.
Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

E.8

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
   $z^2-2z+4=0$

   Les solutions seront notées z et z', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
   Donner l'écriture algébrique puis l'écriture exponentielle des solutions de cette équation.
2. Donner l'écriture exponentielle exacte du nombre complexe $\left(z'\right)^{2\,004}$, puis son écriture algébrique.

E.9 Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation $\left(\mathcal{E}_\lambda\right)$ dépendant du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$;
$x^2-3{\cdot}x+4=\lambda$

Pour quelles valeurs de λ, l'équation $\left(\mathcal{E}_\lambda\right)$ admet deux solutions distinctes conjuguées.

E.10 On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe z :
(E) : $z^2+2{\cdot}a{\cdot}z+a^2+1=0$
où a désigne un nombre réel quelconque.

Une seule des propositions suivante est exacte. Recopier la réponse choisie et justifier cette proposition

a. Pour toute valeur de a, (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.

b. Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et elles sont conjuguées.

c. Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et elles ne sont pas conjuguées.

d. Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.

E.11 On considère la fonction complexe définie sur $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ par la relation :
$f : z \longmapsto \dfrac{z-4}{z-2}$

Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par cette fonction.

E.12 On donne le nombre complexe : $j=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$z^2+z+1=0$
2. Démontrer les égalités suivantes :
   a. $j^3=1$
   b. $j^2=-1-j$
3. On suppose l'existence de trois nombres complexes a, b et c vérifiant l'égalité :
$a+j\cdot b+j^2\cdot c=0$
   a. Démontrer l'égalité : $a-c=j\cdot(c-b)$
   b. Démontrer l'égalité : $a-b=j^2\cdot(b-c)$

3. *Equation du second degré et factorisation*

E.13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$(z-2\cdot\mathrm{i})(z^2-2\cdot z+2)=0$

Donner l'écriture algébrique et l'écriture exponentielle des solutions de cette équation *(justifier les réponses)*.

E.14 Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation : $(\mathcal{E})$: $z^3+z^2-2=0$

1. Montrer que le nombre complexe z_1, définie par $z_1=-1-\mathrm{i}$, est solution de l'équation $\mathcal{E}$.
2. Justifier que le nombre complexe z_2, définie par $z_2=\overline{z_1}$, est également solution de l'équation $(\mathcal{E})$.
3. En remarquant que 1 est également solution de $(\mathcal{E})$, proposer une forme factorisée dans $\mathbb{C}$ du polynôme z^3+z^2-2.

   On développera cette forme pour établir la factorisation.

E.15 On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
(E) : $z^3+4\cdot z^2+2\cdot z-28=0$

1. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive : $(z-2)(z^2+a\cdot z+b)=0$
2. Résoudre (E).

E.16 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :
(E) : $z^3+4\cdot z^2+2\cdot z-28=0$

1. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :
(E) : $(z-2)(z^2+a\cdot z+b)=0$
2. Résoudre l'équation (E).

E.17 On considère l'équation (E) :
$z^3-(4+\mathrm{i})\cdot z^2+(7+\mathrm{i})\cdot z-4=0$
où z désigne un nombre complexe.

1. Montrer que (E) admet une solution réelle, notée z_1.
2. Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait :
$z^3-(4+\mathrm{i})\cdot z^2+(7+\mathrm{i})\cdot z-4=(z-z_1)(z-2-2\cdot\mathrm{i})(a\cdot z+b)$
3. Résoudre (E).

E.18 Pour tout nombre z, on pose : $P(z)=z^4-1$.

1. Factoriser $P(z)$ en produit de facteurs du premier degré.
2. En déduire les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $P(z)=0$, d'inconnue z.
3. Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :
$\left(\frac{2\cdot z+1}{z-1}\right)^4=1$

4. *Racine d'un nombre complexe*

E.19 On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.

1. Calculer a^2 sous forme algébrique.
2. En déduire les deux solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :
$z^2=-2+2\cdot\mathrm{i}\sqrt{3}$.
On écrira les solutions sous forme algébrique.

E.20 Le plan complexe est rapporté à un repère $(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$ orthonormé direct. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=z^2$.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que : $f(M)=M$.
2. Soit A le point d'affixe : $a=\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}$
   a. Exprimer a sous écriture exponentielle.
   b. En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.
3. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.

5. *Equations avec changement de variables*

E.21 Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

1. Montrer que : $(1+i)^6 = -8 \cdot i$.
2. On considère l'équation $(E) : z^2 = -8 \cdot i$
   a. Déduire de 1 une solution de l'équation (E).
   b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous écriture algébrique.
3. Déduire également de 1 une solution de l'équation : $(E') :\ z^3 = -8 \cdot i$

E.22

1. Dans $\mathbb{C}$, on considère le polynôme : $z^2+6z+25$. Déterminer ses racines.
2. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe a et b définis par :
   $a = (1+2 \cdot i)^2 \quad ; \quad b = (1-2 \cdot i)^2$
   b. En déduire les solutions de l'équation :
   $z^4+6z^2+25 = 0$

E.23

1. Dans $\mathbb{C}$, on considère le polynôme : $4z^2-16z+25$. Déterminer ses racines.
2. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe a et b définis par :
   $a = \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2} \cdot i\right)^2 \quad ; \quad b = \left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2} \cdot i\right)^2$
   b. En déduire les solutions de l'équation :
   $4z^4-16z^2+25 = 0$

6. *Equations non-polynômiales ou à coefficients non-réels*

E.24

1. Déterminer l'ensemble des racines du polynôme :
   $P = i \cdot z^2 - 2 \cdot i \cdot z + 3 \cdot i$
2. On considère le polynôme : $Q = i \cdot z^2 + 2 \cdot z - 10 \cdot i$
   a. Vérifier que le nombre complexe z_1 est une racine du polynôme Q où : $z_1 = -3+i$
   b. Déterminer la forme factorisée du polynôme Q.

Indication : On pourra chercher les deux nombres complexes a et b réalisant la factorisation :
$Q = (z+3-i)(a \cdot z+b)$

E.25 Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $(O ; \overrightarrow{u} ; \overrightarrow{v})$ orthonormé direct. On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + i - \frac{1}{z}$$

On recherche l'ensemble (E) des points du plan P privé du point O qui ont pour image par F, le point O.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z :
$$z^2 + i \cdot z - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right)$$
2. En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).
3. Démontrer que les points (E) appartiennent à (Γ).

E.26 Dans le plan complexe muni d'un repère $(O ; \overrightarrow{u} ; \overrightarrow{v})$ orthonormé direct, on note (H) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2$

1. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M. Montrer que :
   M appartient à (H) si, et seulement si, $x^2 - y^2 = 4$
2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives :
   $2 \quad ; \quad -3 - i \cdot \sqrt{5} \quad ; \quad -3 + i \cdot \sqrt{5}$
   Vérifier que A, B et C appartient à (H).

E.27

1. Déterminer le nombre complexe α tel que :
$$\begin{cases} \alpha \cdot (1+i) = 1 + 3 \cdot i \\ i \cdot \alpha^2 = -4 + 3 \cdot i \end{cases}$$
2. Pour tout nombre complexe z, on pose :
   $f(z) = z^2 - (1+3 \cdot i) \cdot z + (-4+3 \cdot i)$
   Montrer que $f(z)$ admet pour expression $(z-\alpha)(z-i \cdot \alpha)$.
   En déduire les écritures algébriques des solutions de l'équation $f(z) = 0$.

7. *Factorisation de $z^n - a^n$ par $z-a$*

E.28 Soit a un nombre complexe différent de 1 et z un nombre complexe quelconque.

1. On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{z}{a}$.
   Soit n un entier naturel non-nul. Établir l'égalité :
$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1} = \frac{1-\frac{z^n}{a^n}}{1-\frac{z}{a}}$$
2. En déduire la factorisation :
$$z^n - a^n = (z-a)\left(z^{n-1}+z^{n-2}a+z^{n-3}a^2+\cdots+z^2a^{n-3}+za^{n-2}+a^{n-1}\right)$$

On remarquera que cette factorisation peut également se noter : $z^n - a^n = (z-a) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot z^{n-k-1}\right)$

8. Exercices non-classés

E.29 *Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.*
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. L'équation $\left(z-4\right)\left(z^2-4\cdot z+8\right)=0$ admet 3 solutions dans $\mathbb{C}$ dont une est réelle et les 2 autres sont conjuguées entre elles.

2. Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :
$(E)\,:\quad z-\overline{z}+2-4\cdot\mathrm{i}=0$
admet une solution unique.

3. On considère la suite $\left(z_n\right)$ de nombres complexes définie par :
$z_0=2 \quad ; \quad z_{n+1}=\left(1+\mathrm{i}\right)\cdot z_n$
Le cinquième terme de la suite est un nombre réel.

4. À tout nombre complexe z, on associe un nombre complexe z' défini par :
$z'=z^2+2z+9$
L'ensemble des nombres complexes z tels que z' soit un réel est l'ensemble des nombres complexes $z=x+\mathrm{i}\cdot y$ où $y=0$.