Terminale Option Experte / Nombres complexes et géométries

1. Module

E.1 Dans le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$, on considère les trois points A, B, C ayant pour affixe respectif a, b, c définis par :

$$a = \sqrt{3} - \mathrm{i}\cdot\sqrt{3} \quad ; \quad b = -1 - \mathrm{i} \quad ; \quad c = 1 - 3\cdot\mathrm{i}$$

1. Établir que : $\dfrac{a-b}{c-b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{i}$
2. Établir que le triangle ABC est isocèle en B.

E.2 Dans le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ orthonormé direct, on considère les trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c définies par :

$$a = -3 + 3\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad b = -\frac{3}{2} - \mathrm{i} \quad ; \quad c = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\cdot\mathrm{i}$$

Établir que le triangle ABC est isocèle en B.

2. Argument et mesure d'angles

E.3 Dans le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$, on considère les trois points A, B, C ayant pour affixe respectif a, b, c définis par :

$$a = 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\cdot\sqrt{3} \quad ; \quad b = 1 - 2\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad c = 3 - \mathrm{i}$$

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

E.4 ⚠ On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
   $a=2 \quad ; \quad b=3+\mathrm{i}\sqrt{3} \quad ; \quad c=2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
2. En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$.

3. Argument et orthogonalité

E.5 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v})$ orthonormé direct, on considère les points E, F, G et H d'affixes respectives :

$$z_E = 5 - 3\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_F = 4 + \mathrm{i}\cdot\left(-3 + \sqrt{3}\right)$$
$$z_G = \mathrm{i} \quad ; \quad z_H = -2\sqrt{3} - \mathrm{i}$$

1. Établir l'égalité : $\dfrac{z_F - z_E}{z_H - z_G} = -\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{i}$
2. En déduire que les droites (EF) et (GH) sont perpendiculaires.

E.6 ⚠ Le plan complexe est muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ orthonormé direct. On prendra $2\,cm$ pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i.

1. On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives :
   $a = -3 - \mathrm{i} \quad ; \quad b = -2 + 4\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad c = 3 - \mathrm{i} \quad ; \quad h = -2.$
   Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
3. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$.
   En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

4. Argument et parallélisme

E.7 On considère le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ orthonormé direct

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 4 - \sqrt{3}\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_B = \left(4 - \sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\cdot\left(1 - \sqrt{3}\right)$$
$$z_C = -1 + 2\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_D = 2\sqrt{3} - 1$$

1. Établir l'égalité : $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = -\dfrac{1}{2}$
2. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

5. *Nature d'un triangle*

E.8 On munit le plan d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé direct.

On considère les deux points A et B d'affixes respectives :
$z_A = 2+2\cdot\mathrm{i}$; $z_B = 1-\mathrm{i}$

1. Donner l'écriture trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{z_A}{z_B}$.
2. En déduire la nature du triangle OAB.

E.9 ⚠ Le plan complexe est muni d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé direct *(unité graphique 4 cm)*.
Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OI]$ et on nomme son centre Ω.

On pose $a_0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{i}$ et on note A_0 son image.

1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathscr{C}$.
2. Soit B le point d'affixe b, avec $b=-1+2\cdot\mathrm{i}$, et B' le point d'affixe b' telle que $b'=a_0\cdot b$.
   a. Calculer b'.
   b. Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

E.10 On considère le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé direct.

On considère les points A, B, C d'affixes respectives :
$z_A = 1+\mathrm{i}$; $z_B = 2+\mathrm{i}\cdot(\sqrt{3}+1)$; $z_C = (1-\sqrt{3})+\mathrm{i}\cdot 2$

1. Déterminer l'écriture algébrique du quotient : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$
2. Déterminer le module et un argument du quotient précédent.
3. Établir que le triangle ABC est rectangle isocèle.

E.11 ⚠ Le plan complexe est muni d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé direct d'unité graphique $2\,cm$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = -2\cdot\mathrm{i}$; $z_B = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$; $z_C = \sqrt{3}+\mathrm{i}$

1. a. Donner l'écriture exponentielle des nombres z_A, z_B et z_C.
   b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.
   c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ, puis placer les points B et C.
2. a. Donner l'écriture algébrique du complexe $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$, puis son écriture exponentielle.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.

6. *Nature d'un quadrilatère*

E.12 ⚠ Dans le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé direct, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :
$z_A = -\sqrt{3}-\mathrm{i}$; $z_B = 1-\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$

$z_C = \sqrt{3}+\mathrm{i}$; $z_D = -1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$

1. Donner le module et un argument de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.
2. Construire à la règle et au compas les points A, B , C et D *(on prendra pour unité graphique 2 cm)*.
3. Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\dfrac{z_A}{z_B}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

E.13 On considère le plan muni du repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé direct et les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A=-2+\mathrm{i}$; $z_B=-3\cdot\mathrm{i}$; $z_C=3-2\cdot\mathrm{i}$; $z_D=3+2\cdot\mathrm{i}$

1. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z défini par le quotient :
   $Z = \dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_B}$
   b. En déduire l'écriture trigonométrique du complexe Z.
2. a. Justifier que le quadrilatère $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur.
   b. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange?

7. *Utilisation des équations cartésiennes*

E.14 On considère le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ orthonormé direct et les deux points C et D d'affixes respectifs c et d définis par : $c = 1+\mathrm{i}$; $d = 3-2\cdot\mathrm{i}$
Pour tout nombre complexez différent de d, on note z_0 le nombre complexe défini par : $z_0 = \dfrac{z-c}{z-d}$

1. En notant $a+\mathrm{i}\cdot b$, où $a, b\in\mathbb{R}$, l'écriture algébrique du nombre z, déterminer l'écriture algébrique du quotient z_0.
2. On souhaite caractériser l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan d'affixe z, tels que le nombre z_0 soit un nombre réel.
   a. Déterminer une relation sur les nombres réels a et b afin que le nombre z_0 soit un nombre réel.
   b. Justifier que l'ensemble $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M du plan distinct de D tels que les points C, D, M soient alignés

E.15 On considère le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé direct et les deux points C et D d'affixes respectifs c et d définis par : $c=2-\mathrm{i}$; $d=1+2{\cdot}\mathrm{i}$

Pour tout nombre complexe z différent de d, on note z_0 le nombre complexe défini par : $z_0=\dfrac{z-c}{z-d}$

1. En notant $a+\mathrm{i}{\cdot}b$, où $a, b\in\mathbb{R}$, l'écriture algébrique du nombre z, déterminer l'écriture algébrique du quotient z_0.
2. On souhaite caractériser l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan d'affixe z, tels que le nombre z_0 soit un imaginaire pur.
   - a. Déterminer une relation sur les nombres réels a et b afin que le nombre z_0 soit un imaginaire pur.
   - b. Justifier que l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point D.

8. *Transformation du plan*

E.16 Le plan complexe P est muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct, unité graphique $2\,cm$.

On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M'=F(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z'=z+\mathrm{i}-\frac{1}{z}$$

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=\mathrm{i}$ et $b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par F d'affixes respectives a' et b'.

1. Calculer a' et b'.
2. Placer les points A, A', B et B'.
3. Démontrer que : $\dfrac{-b}{b'-b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}{\cdot}\mathrm{i}$
4. En déduire la nature du triangle OBB'.

E.17 Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{e_1}\,;\,\overrightarrow{e_2}\right)$ orthonormé direct d'unité graphique $1\,cm$.

Soit A le point d'affixe $3{\cdot}\mathrm{i}$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\dfrac{3{\cdot}\mathrm{i}{\cdot}z-7}{z-3{\cdot}\mathrm{i}}$

Recherche des points invariants par f.

1. Développer $(z-7{\cdot}\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$.
2. Montrer que f admet deux nombres invariants qui sont les affixes de deux points qu'on notera B et C.

Définition : soit f une fonction complexe *(de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$)*.
On dit que le nombre z est un **invariant de la fonction** $\boldsymbol{f}$ si $f(z)=z$.

E.18 Dans le plan complexe rapporté au repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct, on désigne par A le point d'affixes 1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z\neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=\dfrac{1-z}{\overline{z}-1}$

1. Montrer que, pour tout nombre complexe $z\neq 1$, $\dfrac{z'-z}{z-1}$ est réel.
2. Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?

9. *Transformation du plan et image d'un ensemble*

E.19 Le plan complexe P est muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct. On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M'=F(M)$ d'affixe z' définie par : $z'=z+\mathrm{i}-\dfrac{1}{z}$

On note A le point d'affixe i et θ un réel.

1. On note A' l'image du point A par la transformation F. Déterminer l'affixe du point A'.
2. Démontrer que si $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\theta}$ alors $z'=\left(2{\cdot}\sin\theta+1\right){\cdot}\mathrm{i}$
3. En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment $[A'C]$ où C a pour affixe -1.

10. *Transformation du plan et image réciproque d'un ensemble*

E.20 Dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct, on considère la transformation f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=z^2+\mathrm{i}{\cdot}\overline{z}+1-\mathrm{i}$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives :
   $3+2{\cdot}\mathrm{i}$; $-3{\cdot}\mathrm{i}$
   Déterminer l'image de ces deux points par la transformation f.

(2) (a) Soit M un point du plan. On note $a+\text{i}\cdot b$ l'affixe du point M. Exprimer en fonction de a et de b la partie réelle et la partie imaginaire du point M'.

(b) Déterminer une condition sur a et b afin que le point M' appartienne à l'axe des réels.

(c) Déterminer une condition sur a et b afin que le point M' appartienne à l'axe des imaginaires.

E.21 On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct. On considère les points :
$A(0\,;1)$; $B(2\,;-1)$

À tout point du plan M, différent de A et de B, d'affixe z, on associe un point M' d'affixe z' définie par la relation :
$$z'=\frac{z-2+\text{i}}{z-\text{i}}$$

(1) Interpréter géométriquement la longueur OM' et l'angle $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right)$ en utilisant les points A, B et M.

(2) On considère le point $M(4\,;1)$. Déterminer l'écriture algébrique et exponentielle du nombre complexe z' associé à z.

(3) Dans cette question, on souhaite caractériser l'ensemble des points M du plan tel que le point M' appartiennent à l'axe des ordonnées :

(a) On note $z=x+\text{i}\cdot y$. Établir la propriété suivante :
"*z' est un imaginaire pur si* $x^2+y^2-2x-1=0$"

(b) Justifier que l'ensemble recherché est le cercle de diamètre $[AB]$.

11. *Racine n-ièmes de l'unité*

E.22 On s'intéresse à l'ensemble $\mathbb{U}_4$ défini par l'ensemble des solutions de l'équation : $z^4=1$

(1) (a) Factoriser l'expression z^4-1 en produit de facteurs premiers.

(b) Donner l'écriture algébrique, puis l'écriture exponentielle de l'ensemble $\mathbb{U}_4$.

(2) On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct et, pour $j\in\{0\,;1\,;2\,;3\}$, les points M_j d'affixes : $z_j=\text{e}^{\text{i}\cdot\frac{\pi}{2}\times j}$

(a) Montrer que les points M_j, pour $j\in\{0\,;1\,;2\,;3\}$, appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

(b) Établir, pour tout $j\in\{0\,;1\,;2\}$, l'égalité :
$$\widehat{M_jOM_{j+1}}=\frac{\pi}{2}$$

(c) Préciser la nature du quadrilatère : $M_0M_1M_2M_3$

12. *Cours*

E.23 On suppose connus les résultats suivants :

(1) Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C alors :
- $\left|\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\dfrac{CB}{CA}$
- $\arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)\quad(2\pi)$

(2) Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :
$z=\text{e}^{i\cdot\theta}$ si, et seulement si, $|z|=1$ et $\arg(z)=\theta+2\cdot k\cdot\pi$ où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point m d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
$$z'-\omega=\text{e}^{i\cdot\omega}\cdot(z-w)$$

E.24 Le plan complexe est rapporté au repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$.

Rappels :
" Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe z on a :
$|z|=\left\|\overrightarrow{w}\right\|$; $\arg(z)=\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{w}\right)$ ".

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m\neq n$ et $m\neq p$.

(1) Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right)=\left(\overrightarrow{MN}\,;\overrightarrow{MP}\right)$

(2) Interpréter géométriquement le nombre : $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.

E.25 Dans le plan complexe muni du repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ orthonormé direct, on considère les points M et M' distincts de O d'affixes respectives z et z'. On pose :

$z = x + \mathrm{i}\cdot y \quad ; \quad z' = x' + \mathrm{i}\cdot y'$

où x, x', y, y' sont des nombres réels.

On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.

1. Exprimer le complexe $\overline{z}\cdot z'$ en fonction de x, x', y, y'.
2. a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $Re\big(z'\cdot\overline{z}\big)=0$.

   b. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si, $Im(z'\cdot\overline{z})=0$

E.26

Définition :
Pour n un entier naturel non-nul, on considère l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ième de l'unité. On dit qu'une racine ω est une **racine n-ième primitive de l'unité** si les puissances successives de ω *(c'est-à-dire ω, ω^2, ω^3, …, ω^n)* permettent de générer tous les éléments de $\mathbb{U}_n$.

Montrer que si n est un entier premier alors tout élément de $\mathbb{U}_n$ différent de 1 est une racine primitive n-ième de $\mathbb{U}_n$.

13. *Suite*

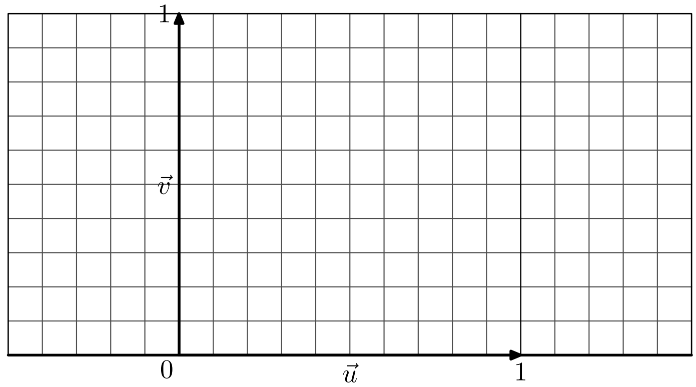
E.27 Le plan complexe est muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ orthonormé direct. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$z_0 = 1 \quad ; \quad z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\right)\cdot z_n$

1. Déterminer les affixes des points A_1 et A_2.
2. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
3. On admet que, pour tout entier naturel n :

   $z_n = \big|z_n\big|\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{n\cdot\pi}{6}}$

   Placer les point A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 dans le repère ci-dessous :



14. *Exercices non-classés*

E.28 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$, on considère les points B et C d'affixes respectives $-\mathrm{i}$ et $7\cdot\mathrm{i}$.

Montrer que tout point M d'affixe z vérifiant :

$z = 3\cdot\mathrm{i} + 4\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\theta} \quad$ où $\theta\in\mathbb{R}$

appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[BC]$.

