Terminale Option Experte / Nombres complexes et trigonométrie

1. Rappels

E.1

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Déterminer les valeurs exactes des expressions ci-dessous :

a) $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ b) $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ c) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

E.2

Formule des angles associés

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi+x) = -\cos x$
- $\sin(\pi+x) = -\sin x$
- $\cos(\pi-x) = -\cos x$
- $\sin(\pi-x) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

Soit α un nombre réel. Simplifier les écritures suivantes :

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ b) $\sin\left(\alpha+3\cdot\pi\right)$

c) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ d) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

E.3 À l'aide de la relation : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ où $x \neq \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$
simplifier les expressions suivantes :

a) $\tan\left(x+\pi\right)$ b) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

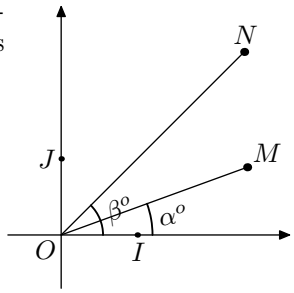
2. Formules d'addition

E.4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère les points M et N tel que :

$\|\overrightarrow{OM}\| = a$; $\|\overrightarrow{ON}\| = b$

$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \alpha$; $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON}\right) = \beta$



1) a) Déterminer les coordonnées des points M et N.

b) Donner une expression du produit scalaire $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$

2) a) Donner la mesure de l'angle orienté : $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}\right)$

b) Donner une autre expression de $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$.

3) En déduire l'égalité :
$\cos\left(\beta-\alpha\right) = \cos\beta\cdot\cos\alpha + \sin\beta\cdot\sin\alpha$

E.5

Formule d'addition et de différence

- $\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a\cdot\cos b - \cos a\cdot\sin b$

Déterminer une simplification des expressions suivantes :

1) $\cos 2x\cdot\cos x - \sin 2x\cdot\sin x$

2) $\sin 3x\cdot\cos 2x - \sin 2x\cdot\cos 3x$

E.6 Montrer la relation suivante :

$\sin(a+b)\cdot\cos(a-b) = \sin a\cdot\cos a + \cos b\cdot\sin b$

E.7

1) Simplifier l'expression suivante :
$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

2) Établir l'égalité suivante :
$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\left(\sin 3x\right)^2}{\sin(2x)\cdot\sin(x)}$$

3) Résoudre l'équation suivante :
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(2x) + \frac{1}{2}\cdot\sin(2x) = \cos\frac{\pi}{7}$$

 CC BY-NC

3. *Formules de duplication*

E.8

Formule de duplication

- $\cos(2a) = \left(\cos a\right)^2 - \left(\sin a\right)^2$
- $\cos(2a) = 2\cdot\left(\cos a\right)^2 - 1$
- $\cos(2a) = 1 - 2\cdot\left(\sin a\right)^2$
- $\sin(2a) = 2\cdot \sin a\cdot \cos a$

1. Établir la relation suivante : $\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)$
2. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$.
3. Établir la relation : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

4. *Opération sur les écritures trigonométrique*

E.9 On considère les deux nombres complexes :

$z_1 = 1 + \mathrm{i}$; $z_2 = 3 + \sqrt{3}\cdot\mathrm{i}$

1. Déterminer l'écriture trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2.
2. Effectuer le produit $z_1\cdot z_2$. En déduire l'écriture trigonométrique de ce produit.
3. a. Exprimer le module du produit $z_1\cdot z_2$ en fonction des modules de z_1 et z_2.
   b. Exprimer l'argument du produit $z_1\cdot z_2$ en fonction des arguments de z_1 et z_2.

E.10 On considère les deux nombres complexes :

$z_1 = 2 - 2\cdot\mathrm{i}$; $z_2 = -1 + \sqrt{3}\cdot\mathrm{i}$

1. Déterminer l'écriture trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2.
2. Donner l'écriture trigonométrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$.
3. a. Exprimer le module du produit $\frac{z_1}{z_2}$ en fonction des modules de z_1 et z_2.
   b. Exprimer l'argument du produit $\frac{z_1}{z_2}$ en fonction des arguments de z_1 et z_2.

E.11 Rechercher tous les couples $(z_1\,;z_2)$ de nombres complexes satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} z_1\cdot z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1 + 2\cdot z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Déterminer l'écriture trigonométrique de chacun des nombres ainsi obtenus.

5. *Ecritures exponentielles*

E.12 Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z_1 = 3\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi}$ b. $z_2 = \sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4}}$ c. $z_3 = 2\sqrt{3}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6}}$

E.13 Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

a. $z_1 = 5$ b. $z_2 = -3$ c. $z_3 = -3\cdot\mathrm{i}$

d. $z_4 = -3 + 3\cdot\mathrm{i}$ e. $z_5 = -2\sqrt{3} - 2\cdot\mathrm{i}$ f. $z_6 = \sqrt{3} - 3\cdot\mathrm{i}$

E.14

1. Soit z un nombre complexe admettant la forme exponentielle :

   $z = r\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\theta}$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$, $\theta\in\mathbb{R}$

   Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants : a. $\overline{z}$ b. $-z$
2. a. Justifier l'égalité suivante : $2\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}} = -2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}}$
   b. En déduire l'écriture exponentielle de :

   $2\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}} + 3\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}}$

6. *Produit, quotient d'écriture exponentielle*

E.15

1. Donner l'écriture exponentielle des deux nombres complexes suivants : $z_1 = 1 - \mathrm{i}$; $z_2 = 1 + \mathrm{i}$
2. En déduire l'écriture exponentielle du nombre complexe :

   $z = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

CC BY-NC

E.16 On considère les deux nombres complexes :

$z_1 = 1 + \mathrm{i} \quad ; \quad z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

1. Déterminer les écritures exponentielles des nombres z_1 et z_2.
2. On note z_3 et z_4 les deux nombres complexes définis par :
   $z_3 = z_1 \cdot z_2 \quad ; \quad z_4 = \dfrac{z_1}{z_2}$
   Déterminer les écritures exponentielles des nombres z_3 et z_4.

E.17 On considère les deux nombres complexes donnés ci-dessous :

$z_1 = \sqrt{3}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_2 = \sqrt{6}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6}}$

Déterminer une expression simplifiée des calculs suivants :

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\dfrac{z_1}{z_2}$ c) $z_1 + z_2$

E.18 On considère dans $\mathbb{C}$ les nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β. Montrer que :

$\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1\cdot z_2}$ est un réel positif ou nul.

7. Ecriture exponentielle et mesure principale de l'argument

E.19 On considère les deux nombres complexes suivants donnés sous leur forme exponentielle :

$z_1 = 2\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}} \quad ; \quad z_2 = 3\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{3\pi}{4}}$

Donner l'écriture exponentielle des expressions suivantes :

a) $z_1\cdot z_2$ b) $(z_1)^2\cdot z_2$ c) $\dfrac{z_2}{(z_1)^3}$

Indication : *On donnera les mesures principales des arguments*

E.20

1. a) Soit z_1 le nombre complexe admettant pour écriture algébrique : $z_1 = -2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\mathrm{i}$
   Déterminer l'écriture exponentielle de ce nombre.
   b) Soit z_2 le nombre complexe vérifiant :
   $|z_2| = \sqrt{2} \quad ; \quad \arg(z_2) = \dfrac{3}{4}\cdot\pi$
   Déterminer l'écriture algébrique du complexe z_2
2. Déterminer, à votre convenance, soit l'écriture algébrique, soit l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :
   a) $z_1 \cdot z_2$ b) $z_1 + z_2$

Indication : *On donnera les mesures principales des arguments*

E.21 Le plan complexe est rapporté à un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé direct. On considère l'application z de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f : z \longmapsto z^2$.

On considère le complexe : $a = \sqrt{2} - \mathrm{i}\cdot\sqrt{2}$

1. Exprimer a sous écriture exponentielle.
2. En déduire les nombres complexes antécédents du nombre a par f.

8. Puissance d'écriture exponentielle

E.22 On considère le nombre complexe z défini par : $z = 1+\mathrm{i}$

Établir que le nombre z^{100} est un nombre réel.

E.23 *Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.*

1. Soit $z = 3+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$.
   Proposition 1 : Pour tout entier naturel n non nul, $z^{3\cdot n}$ est imaginaire pur.
2. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 2 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors :
   $|\mathrm{i}+z| = 1 + |z|$
3. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 3 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

9. Formule d'Euler

E.24

On **linéarise** une expression de la forme $\cos^p(x)\cdot\sin^q(x)$, où $p,q\in\mathbb{N}$ lorsqu'on la transforme en une combinaison linéaire d'expression de la forme $\cos(n\cdot x)$ et $\sin(m\cdot x)$, où $n,m\in\mathbb{N}$

Établir la linéarisation suivante :

$$\cos(x)^2\cdot\sin(x)^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cdot\cos(4x)$$

CC BY-NC

E.25 On souhaite linéariser l'expression $\cos^3(x)$:

1. À l'aide de la formule d'Euler et la formule du binôme, établir :
$$\cos^3(x) = \frac{e^{-3i\cdot x} + 3\cdot e^{-i\cdot x} + 3\cdot e^{i\cdot x} + e^{3i\cdot x}}{8}$$

2. En déduire l'identité : $\cos^3(x) = \dfrac{\cos(3x) + 3\cdot\cos(x)}{4}$

E.26 Pour tout nombre réel x et pour tout entier k non-nul, établir la relation :
$$\big[\cos(x)\big]^{2k} = \frac{1}{4^k}\cdot\binom{2k}{k} + \frac{1}{2^{2k-1}}\cdot\sum_{\ell=0}^{k-1}\binom{2k}{\ell}\cdot\cos\big[(2k-2\ell)x\big]$$

10. *Formule de Moivre*

E.27

Pour tout entier naturel n et tout nombre réel θ, on a :
$$\big(\cos\theta + i\cdot\sin\theta\big)^n = \cos\big(n\cdot\theta\big) + i\cdot\sin\big(n\cdot\theta\big)$$

1. À l'aide de la formule du binôme, établir l'identité :
$$\big(\cos\theta + i\cdot\sin\theta\big)^3 = \big(4\cdot\cos(\theta)^3 - 3\cdot\cos\theta\big) + i\big(3\cdot\sin\theta - 4\cdot\sin(\theta)^3\big)$$

2. À l'aide de la formule de Moivre, établir les identités :
$$\cos(3\theta) = 4\cdot\cos(\theta)^3 - 3\cdot\cos\theta \quad ; \quad \sin(3\theta) = 3\cdot\sin\theta - 4\cdot\sin(\theta)^3$$

11. *Cours*

E.28

On rappelle les deux résultats suivants :

- Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :
$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \quad \text{à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \iff \begin{cases} z = r\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) \\ r > 0 \end{cases}$$
- Pour tous nombres réels a et b :
$$\begin{cases} \cos\big(a+b\big) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b \\ \sin\big(a+b\big) = \sin a\cdot\cos b + \sin b\cdot\cos a \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :
$$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$$
$$\arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

E.29 On rappelle que pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe z, on a :
$$|z| = \|\overrightarrow{w}\| \quad ; \quad \arg(z) = \big(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{w}\big) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Prérequis : on sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :
$$\arg(z\cdot z') = \arg(z) + arg(z')$$
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

E.30 On considère deux nombres complexes z et z' non-nuls de modules respectifs r et r' et d'arguments respectifs θ et θ'.

1. Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes z et z'.
2. Montrer que le nombre complexe $z\cdot z'$ est un nombre complexe de module $(r\cdot r')$ et d'argument $(\theta+\theta')$.
3. Montrer que le nombre complexe $\dfrac{z}{z'}$ est un nombre complexe de module $\dfrac{r}{r'}$ et d'argument $(\theta-\theta')$.

12. *Exercices non-classés*

E.31 Soit les nombres complexes :
$$z_1 = \sqrt{2} + i\cdot\sqrt{6} \quad ; \quad z_2 = 2 + 2\cdot i \quad ; \quad Z = \frac{z_1}{z_2}$$

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et les arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

E.32 On considère l'équation (E) suivante :
$$z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cdot z + 1 = 0$$
Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre affirmation :

"*L'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1.*"

CC BY-NC