Terminale Option Experte / Nombres complexes

1. Ecriture algébrique d'un nombre complexe

E.1 Sachant que $\mathrm{i}^2=-1$, simplifier l'écriture des expressions suivantes :

(a) i^2 (b) i^3 (c) i^4 (d) i^5

(e) i^{14} (f) i^{100} (g) i^{-1} (h) i^{-3}

E.2 Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_1 = 3\cdot(2-\mathrm{i}) + \mathrm{i}\cdot(3+2\cdot\mathrm{i})$ (b) $z_2 = (5+2\cdot\mathrm{i})\cdot(1-\mathrm{i})$

E.3 Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_1 = (5+2\cdot\mathrm{i})^2$ (b) $z_5 = (2-\mathrm{i})^2 - 2\cdot(1+3\cdot\mathrm{i})^2$

2. Evaluation d'expressions

E.4

1. On considère le polynôme P à coefficient dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{C}$ par : $P=2\cdot z^3+z^2+2\cdot z+1$

   Vérifier que les trois nombres ci-dessous sont des racines du polynôme P :
   $z_1=-\mathrm{i}$; $z_2=\mathrm{i}$; $z_3=-\dfrac{1}{2}$

2. On considère le polynôme Q à coefficient dans $\mathbb{C}$ définie sur $\mathbb{C}$ par : $Q=\mathrm{i}\cdot z^2+(2+\mathrm{i})\cdot z+2$

   Vérifier que le nombre complexe $z_4=2\cdot\mathrm{i}$ est une racine du polynôme Q.

E.5

1. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :
   $P = 2\cdot z^3 + 3\cdot z^2 + 2\cdot z - 2$

   Vérifier que les deux complexes z_1 et z_2 sont des racines du polynôme P où :
   $z_1 = -1+\mathrm{i}$; $z_2 = -1-\mathrm{i}$

2. On considère le polynôme Q défini sur $\mathbb{C}$ par :
   $Q = z^3 + z^2 + 3\cdot z - 5$

   Vérifier que les deux complexes z_3 et z_4 sont des racines du polynôme Q où :
   $z_3 = -1-2\cdot\mathrm{i}$; $z_4 = -1+2\cdot\mathrm{i}$

3. Equations

E.6

1. Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (E) définie par :
   $(E) :\quad z+2-\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})\cdot z$

   Montrer que le nombre complexe $-1-2\mathrm{i}$ est solution de l'équation (E).

2. Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (F) définie par :
   $(F) :\quad (z-1+2\cdot\mathrm{i})(z+2\cdot\mathrm{i}) = z^2-\mathrm{i}$

   Montrer que le nombre complexe $-\mathrm{i}$ est solution de l'équation (F).

E.7

Rappel : un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Considérons l'équation (E) : $\mathrm{i}\cdot z+2=\mathrm{i}$

1. En notant $a+\mathrm{i}\cdot b$ l'écriture algébrique d'une solution z de l'équation (E), montrer que : $(2-b)+\mathrm{i}\cdot(a-1)=0$

2. En déduire l'écriture algébrique de l'unique solution de l'équation (E).

E.8 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $(3+\mathrm{i})\cdot z-3\cdot(5\cdot z-2)=0$

4. Conjugué : définitions

E.9

Définition : pour tout nombre complexe z admettant l'écriture algébrique $a+\mathrm{i}\cdot b$, avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$, on appelle **conjugué du nombre complexe z**, le nombre complexe, notée $\overline{z}$ définie par : $\overline{z}=a-\mathrm{i}\cdot b$

Donner l'écriture algébrique du conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $z=1+\mathrm{i}$ (b) $z=2\cdot\mathrm{i}-3$ (c) $z=\mathrm{i}\cdot(1+2\cdot\mathrm{i})$

E.10 Soit z un nombre complexe.

1. Démontrer que les deux nombres suivants sont des réels :
   $z+\overline{z}$; $z\cdot\overline{z}$

2. Démontrer que le nombre complexe $z-\overline{z}$ est un imaginaire pur.

5. *Conjugué : simplification de quotient*

E.11

> **Méthode :** considérons le nombre définie par $\dfrac{z}{z'}$, où z et z' sont deux nombres complexes. Pour obtenir son écriture algébrique, on considère le quotient $\dfrac{z\cdot\overline{z'}}{z'\cdot\overline{z'}}$ dont le dénominateur est un nombre réel.

Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}$ (b) $z=\dfrac{2}{2-\mathrm{i}}$ (c) $z=\dfrac{3}{1+2{\cdot}\mathrm{i}}$

E.12 Donner l'écriture algébrique des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_1=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ (b) $z_2=\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$ (c) $z_3=\dfrac{-2+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$

E.13 Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z=\dfrac{2+2{\cdot}\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$ (b) $z=\dfrac{3-4{\cdot}\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ (c) $z=\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}{\cdot}\mathrm{i}}$

6. *Equations de la forme $a{\cdot}z=b$*

E.14 Résoudre les équations suivantes et donner les écritures algébriques de leurs solutions :

(a) $\mathrm{i}{\cdot}z=1+2{\cdot}\mathrm{i}$ (b) $(1+\mathrm{i}){\cdot}z=5$ (c) $4{\cdot}z=\mathrm{i}-2$

E.15 Résoudre les équations suivantes :

(a) $3{\cdot}z+2\mathrm{i}{\cdot}z=3-\mathrm{i}$ (b) $(5-\mathrm{i})(z+3)=\mathrm{i}$

7. *Equations du premier degré*

E.16 Résoudre les équations suivantes :

(a) $\dfrac{2-3{\cdot}z}{z+\mathrm{i}}=-2{\cdot}\mathrm{i}+z$ (b) $(1+2{\cdot}\mathrm{i})(z-3{\cdot}\mathrm{i})=z+2+3{\cdot}\mathrm{i}$

8. *Conjugué : propriétés algébriques*

E.17 Sans effectuer de calcul, justifier que les nombres complexes z_1 et z_2 sont des nombres complexes conjugués.

(a) $z_1=(1+\mathrm{i}){\cdot}(2-\mathrm{i})$; $z_2=(1-i){\cdot}(2+i)$

(b) $z_1=\dfrac{\mathrm{i}-3}{2+2{\cdot}\mathrm{i}}$; $z_2=\dfrac{-\mathrm{i}-3}{2-2{\cdot}\mathrm{i}}$

(c) $z_1=(1-\mathrm{i})^5$; $z_2=(1+\mathrm{i})^5$

E.18 Pour chacun des nombres complexes, déterminer l'écriture algébrique de leur conjugué :

(a) $z=\dfrac{5-2{\cdot}\mathrm{i}}{\mathrm{i}-2}$ (b) $z=\dfrac{(3-2{\cdot}\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}$

9. *Equations avec z et $\overline{z}$*

E.19 ⚠

> **Rappels :** un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire est nulle.
> Ainsi, pour $z\in\mathbb{C}$, cette propriété se traduit par :
> $z=0 \iff \Re(z)=0$ et $\Im(z)=0$

Déterminer les valeurs des réels a et b réalisant l'égalité suivante :

$$2{\cdot}a+b{\cdot}(2+\mathrm{i})-3{\cdot}\mathrm{i}=a{\cdot}(\mathrm{i}-2)+b{\cdot}(1-2{\cdot}\mathrm{i})$$

E.20 Résoudre les équations suivantes :

(a) $z+\overline{z}=6$ (b) $z+\overline{z}=\mathrm{i}$

(c) $z+2{\cdot}\overline{z}=8+\mathrm{i}$ (d) $\mathrm{i}{\cdot}\overline{z}+2{\cdot}(z-5)=0$

E.21 Résoudre les équations suivantes :

(a) $3+\mathrm{i}{\cdot}z+2{\cdot}\mathrm{i}=z$ (b) $(3+\mathrm{i}){\cdot}z-3{\cdot}(5{\cdot}z-2)=0$

10. *Formule du binôme*

E.22 Donner l'écriture algébrique du nombre : $z=\sum_{k=0}^{4}(1+\text{i})^k$

11. *Suite*

E.23

1. Simplifier l'écriture de l'expression suivante :
   $A=1+\text{i}+\text{i}^2+\text{i}^3$
2. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe :
   $B=1+\text{i}+\text{i}^2+\cdots+\text{i}^{99}$

12. *Cours - Nombres complexes*

E.24 **Prérequis**

Soit z un nombre complexe tel que $z=a+\text{i}\cdot b$ où a et b sont deux nombres réels.
On note $\overline{z}$ le nombre complexe défini par : $\overline{z}=a-\text{i}\cdot b$

Questions

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z' :
   $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z :
   $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$

E.25 **Restitution organisée de connaissance**

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z=x+\text{i}\cdot y$ où $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe définie par : $z=x-\text{i}\cdot y$

Démontrer que :

- Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 : $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
- Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul : $\overline{z^n}=\overline{z}^n$.

E.26

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2=z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2 :
  $$\left|z_1\times z_2\right|=\left|z_1\right|\times\left|z_2\right|.$$
- pour tout nombre complexe z non nul :
  $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$

13. *Exercices non-classés*

E.27 Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z défini par : $z=\frac{1-\text{i}}{1+\text{i}}$

E.28 On considère le nombre complexe : $j=-\frac{1}{2}+\text{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
$(1+j)^{2n+1}=-j^{n+2}$