# Terminale Option Experte / Nombres complexes

## 1. Ecriture algébrique d'un nombre complexe

**E.1** Sachant que $i^2=-1$, simplifier l'écriture des expressions suivantes :

(a) $i^2$ (b) $i^3$ (c) $i^4$ (d) $i^5$

(e) $i^{14}$ (f) $i^{100}$ (g) $i^{-1}$ (h) $i^{-3}$

**E.2** Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_1=3\cdot(2-i)+i\cdot(3+2\cdot i)$ (b) $z_2=(5+2\cdot i)\cdot(1-i)$

**E.3** Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_3=-5\cdot i\cdot(5-4\cdot i)-3\cdot i$ (b) $z_4=(5+2\cdot i)\cdot(5-2\cdot i)$

**E.4** Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_1=(5+2\cdot i)^2$ (b) $z_5=(2-i)^2-2\cdot(1+3\cdot i)^2$

**E.5** Soit $x$ un nombre réel. On considère le nombre complexe $z$ défini par l'égalité :

$z=(x+2\cdot i)\cdot(1-x\cdot i)$

1. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe $z$.
2. (a) Pour quelle*(s)* valeur*(s)* de $x$, $z$ est un nombre réel?

   (b) Pour quelle*(s)* valeur*(s)* de $x$, $z$ est un imaginaire pur?

## 2. Evaluation d'expressions

**E.6**

1. On considère le polynôme $P$ à coefficient dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{C}$ par : $P=2\cdot z^3+z^2+2\cdot z+1$

   Vérifier que les trois nombres ci-dessous sont des racines du polynôme $P$ :

   $z_1=-i$ ; $z_2=i$ ; $z_3=-\dfrac{1}{2}$

2. On considère le polynôme $Q$ à coefficient dans $\mathbb{C}$ définie sur $\mathbb{C}$ par : $Q=i\cdot z^2+(2+i)\cdot z+2$

   Vérifier que le nombre complexe $z_4=2\cdot i$ est une racine du polynôme $Q$.

**E.7**

1. On considère le polynôme $P$ défini sur $\mathbb{C}$ par :

   $P=2\cdot z^3+3\cdot z^2+2\cdot z-2$

   Vérifier que les deux complexes $z_1$ et $z_2$ sont des racines du polynôme $P$ où :

   $z_1=-1+i$ ; $z_2=-1-i$

2. On considère le polynôme $Q$ défini sur $\mathbb{C}$ par :

   $Q=z^3+z^2+3\cdot z-5$

   Vérifier que les deux complexes $z_3$ et $z_4$ sont des racines du polynôme $Q$ où :

   $z_3=-1-2\cdot i$ ; $z_4=-1+2\cdot i$

## 3. Equations

**E.8**

1. Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation $(E)$ définie par :

   $(E)$ : $z+2-i=(1+i)\cdot z$

   Montrer que le nombre complexe $-1-2i$ est solution de l'équation $(E)$.

2. Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation $(F)$ définie par :

   $(F)$ : $(z-1+2\cdot i)(z+2\cdot i)=z^2-i$

   Montrer que le nombre complexe $-i$ est solution de l'équation $(F)$.

**E.9**

**Rappel :** un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Considérons l'équation $(E)$ : $i\cdot z+2=i$

1. En notant $a+i\cdot b$ l'écriture algébrique d'une solution $z$ de l'équation $(E)$, montrer que : $(2-b)+i\cdot(a-1)=0$
2. En déduire l'écriture algébrique de l'unique solution de l'équation $(E)$.

**E.10** Dans $\mathbb{C}$, résoudre les équations suivantes :

(a) $z+2\cdot i\cdot z=i$ (b) $z+2-i\cdot(z+1)=0$

**E.11** Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :
$(3+i)\cdot z-3\cdot(5\cdot z-2)=0$

**E.12** Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations :

(a) $\dfrac{z-5}{z-i}=i$ (b) $\dfrac{2-3\cdot z}{z+i}=-2\cdot i+z$

**Indication pour la seconde équation :** l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est dit **intègre**. C'est-à-dire qu'il vérifie la propriété pour tout nombre complexe $a$ et $b$ :

$a\cdot b=0 \implies a=0$ ou $b=0$

## 4. *Conjugué : définitions*

E.13

**Définition :** pour tout nombre complexe $z$ admettant l'écriture algébrique $a+\mathrm{i}\cdot b$, avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$, on appelle **conjugué du nombre complexe $z$**, le nombre complexe, notée $\overline{z}$ définie par : $\overline{z}=a-\mathrm{i}\cdot b$

Donner l'écriture algébrique du conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $z=1+\mathrm{i}$  (b) $z=2\cdot\mathrm{i}-3$  (c) $z=\mathrm{i}\cdot(1+2\cdot\mathrm{i})$

E.14 Soit $z$ un nombre complexe.

1. Démontrer que les deux nombres suivants sont des réels : $z+\overline{z}$ ; $z\cdot\overline{z}$
2. Démontrer que le nombre complexe $z-\overline{z}$ est un imaginaire pur.

## 5. *Conjugué : simplification de quotient*

E.15

**Méthode :** considérons le nombre défini par $\dfrac{z}{z'}$, où $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes. Pour obtenir son écriture algébrique, on considère le quotient $\dfrac{z\cdot\overline{z'}}{z'\cdot\overline{z'}}$ dont le dénominateur est un nombre réel.

Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}$  (b) $z=\dfrac{2}{2-\mathrm{i}}$  (c) $z=\dfrac{3}{1+2\cdot\mathrm{i}}$

E.16 Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_1=\dfrac{2}{\mathrm{i}}$  (b) $z_2=\dfrac{3}{2-4\cdot\mathrm{i}}$  (c) $z_3=\dfrac{-2}{1+\mathrm{i}}$

E.17 Donner l'écriture algébrique des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_1=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$  (b) $z_2=\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$  (c) $z_3=\dfrac{-2+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$

E.18 On considère les deux nombres complexes $z_1$ et $z_2$ définis par :

$z_1=1+\mathrm{i}$ ; $z_2=5-2\cdot\mathrm{i}$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

(a) $z_1+z_2$  (b) $z_1-z_2$  (c) $z_1-2\cdot z_2$

(d) $z_1\cdot z_2$  (e) $\dfrac{z_1}{z_2}$  (f) $\dfrac{z_2}{z_1-z_2}$

E.19 Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z=\dfrac{2+2\cdot\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$  (b) $z=\dfrac{3-4\cdot\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$  (c) $z=\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}}$

E.20 Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_4=\dfrac{3-2\cdot\mathrm{i}}{5+3\cdot\mathrm{i}}$  (b) $z_5=\dfrac{2+3\cdot\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$  (c) $z_6=\dfrac{2}{2+\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}}$

E.21 Soit $z$ un nombre complexe distinct de 0 et de i. On considère les nombres complexes $n$, $p$ et $q$ dont leur affixe est définie par : $n=\mathrm{i}\cdot z+1+\mathrm{i}$ ; $p=-z+1+\mathrm{i}$ ; $q=-\mathrm{i}\cdot z$

Établir l'égalité suivante : $\dfrac{z-n}{p-n}=\mathrm{i}+\dfrac{1}{z}$

## 6. *Equations de la forme $a\cdot z=b$*

E.22 Résoudre les équations suivantes et donner les écritures algébriques de leurs solutions :

(a) $\mathrm{i}\cdot z=1+2\cdot\mathrm{i}$  (b) $(1+\mathrm{i})\cdot z=5$  (c) $4\cdot z=\mathrm{i}-2$

E.23 Résoudre les équations suivantes :

(a) $3\cdot z+2\mathrm{i}\cdot z=3-\mathrm{i}$  (b) $(5-\mathrm{i})(z+3)=\mathrm{i}$

## 7. *Equations du premier degré*

E.24 Résoudre les équations suivantes :

(a) $\dfrac{2-3\cdot z}{z+\mathrm{i}}=-2\cdot\mathrm{i}+z$  (b) $(1+2\cdot\mathrm{i})(z-3\cdot\mathrm{i})=z+2+3\cdot\mathrm{i}$

## 8. *Conjugué : propriétés algébriques*

**E.25** Sans effectuer de calcul, justifier que les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ sont des nombres complexes conjugués.

a) $z_1 = (1+\mathrm{i})\cdot(2-\mathrm{i})$ ; $z_2 = (1-i)\cdot(2+i)$

b) $z_1 = \dfrac{\mathrm{i}-3}{2+2\cdot\mathrm{i}}$ ; $z_2 = \dfrac{-\mathrm{i}-3}{2-2\cdot\mathrm{i}}$

c) $z_1 = (1-\mathrm{i})^5$ ; $z_2 = (1+\mathrm{i})^5$

**E.26** Pour chacun des nombres complexes ci-dessous :

- sans calcul, donner une expression du nombre complexe conjugué du nombre $z$ ;
- puis, donner l'écriture algébrique du nombre complexe $\overline{z}$.

a) $z = (2-\mathrm{i})(5+3\cdot\mathrm{i})$ b) $z = \mathrm{i}\cdot(3+2\cdot\mathrm{i}) - 3 + \mathrm{i}$

**E.27** Pour chacun des nombres complexes, déterminer l'écriture algébrique de leur conjugué :

a) $z = \dfrac{5-2\cdot\mathrm{i}}{\mathrm{i}-2}$ b) $z = \dfrac{(3-2\cdot\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}$

**E.28** On considère les deux nombres complexes $z_1$ et $z_2$ :

$z_1 = \dfrac{3-2\cdot\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ ; $z_2 = \dfrac{3+2\cdot\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

1) Que peut-on dire des nombres complexes $z_1$ et $z_2$?

2) a) Déterminer l'écriture algébrique du nombre $z_1$.

b) En déduire l'expression de $z_1+z_2$ et $z_1-z_2$.

# 9. *Equations avec $z$ et $\overline{z}$*

**E.29**

**Rappels :** un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire est nulle.
Ainsi, pour $z\in\mathbb{C}$, cette propriété se traduit par :
$z=0 \iff \Re(z)=0$ et $\Im(z)=0$

Déterminer les valeurs des réels $a$ et $b$ réalisant l'égalité suivante :
$2\cdot a + b\cdot\big(2+\mathrm{i}\big) - 3\cdot\mathrm{i} = a\cdot\big(\mathrm{i}-2\big) + b\cdot\big(1-2\cdot\mathrm{i}\big)$

**E.30** Résoudre les équations suivantes :

a) $z+\overline{z} = 6$ b) $z+\overline{z} = \mathrm{i}$

c) $z+2\cdot\overline{z} = 8+\mathrm{i}$ d) $\mathrm{i}\cdot\overline{z} + 2\cdot(z-5) = 0$

**E.31** Résoudre les équations suivantes :

a) $3+\mathrm{i}\cdot z + 2\cdot\mathrm{i} = z$ b) $(3+\mathrm{i})\cdot z - 3\cdot(5\cdot z-2) = 0$

**E.32** Résoudre les équations suivantes :

a) $\dfrac{\overline{z}}{z+1} = 1$ b) $\big(1-\overline{z}\big)\big(\mathrm{i}\cdot z+2\big) = 2$

# 10. *Formule du binôme*

**E.33** Établir l'égalité : $(2+\mathrm{i})^5 = -38+41\cdot\mathrm{i}$

**E.34** Donner l'écriture algébrique du nombre :

$$z = \sum_{k=0}^{4} \big(1+\mathrm{i}\big)^k$$

# 11. *Suite*

**E.35**

1) Simplifier l'écriture de l'expression suivante :
$A = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3$

2) Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe :
$B = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \cdots + \mathrm{i}^{99}$

# 12. *Cours - Nombres complexes*

**E.36** **Prérequis**

Soit $z$ un nombre complexe tel que $z=a+\mathrm{i}\cdot b$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.
On note $\overline{z}$ le nombre complexe défini par : $\overline{z} = a - \mathrm{i}\cdot b$

**Questions**

1) Démontrer que, pour tous nombres complexes $z$ et $z'$ :
$\overline{z\times z'} = \overline{z}\times\overline{z'}$

2) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul et tout nombre complexe $z$ :
$\overline{z^n} = \big(\overline{z}\big)^n$

E.37 **Restitution organisée de connaissance**

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z=x+\mathrm{i}\cdot y$ où $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, le conjugué de $z$ est le nombre complexe défini par : $\overline{z}=x-\mathrm{i}\cdot y$

Démontrer que :

- Pour tous nombres complexes $z_1$ et $z_2$ : $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
- Pour tout nombre complexe $z$ et tout entier naturel non nul : $\overline{z^n}=\overline{z}^n$.

E.38

**Prérequis :** le module d'un nombre complexe $z$ quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2=z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de $z$.

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes $z_1$ et $z_2$ :

  $\left|z_1\times z_2\right|=\left|z_1\right|\times\left|z_2\right|$.
- pour tout nombre complexe $z$ non nul :
  $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$

## 13. *Exercices non-classés*

E.39 Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe $z$ défini par : $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

E.40 On considère le nombre complexe : $j=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'égalité suivante pour tout entier naturel $n$ :

$(1+j)^{2n+1}=-j^{n+2}$