Terminale Option Experte / Opérations sur les matrices

1. Addition

E.1

Définition : soit m, n deux entiers naturels non-nuls $(m,n\in\mathbb{N}^*)$. On considère deux matrices A et B de dimensions $m\times n$ et on note respectivement a_{ij} et b_{ij} leurs coefficients.
La **somme des matrices A et B** est la matrice de dimensions $m\times n$ notée $\boldsymbol{A+B}$ dont les coefficients c_{ij}, sont définis par :

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\quad\forall i\in[\![1\,;m]\!]\quad;\quad\forall j\in[\![1\,;n]\!]$$

Effectuer les additions de matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-3\\-1&-2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}-4&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&4\end{pmatrix}$

E.2 Effectuer les opérations suivantes :

a) $\begin{pmatrix}1&0&2\\4&1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&-2\\-1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1\\0&-1\end{pmatrix}$

2. Multiplication par un réel et addition

E.3

Définition : soit λ un nombre réel $(\lambda\in\mathbb{R})$ et A une matrice de dimension $m\times n$ $(m,n\in\mathbb{N}^*)$ dont les coefficients sont notés a_{ij}
On appelle **produit de la matrice A par le scalaire λ**, la matrice de dimensions $m\times n$ notée $\boldsymbol{\lambda\cdot A}$ et dont les coefficients b_{ij} sont définis par :

$$b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}\quad\forall i\in[\![1\,;m]\!]\quad;\quad\forall i\in[\![1\,;m]\!]$$

Effectuer les opérations suivantes :

a) $2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&-1\end{pmatrix}$

b) $4\cdot\begin{pmatrix}-1&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}&1\\-2&0&0\end{pmatrix}$

3. Multiplication

E.4

Définition : soit m, n, p trois entiers naturels non-nuls $(m,n,p\in\mathbb{N}^*)$.
On considère les deux matrices A et B de dimensions respectives $m\times n$ et $n\times p$. Le **produit de la matrice A par la matrice B** est une matrice de dimensions $m\times p$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij}=\sum_{k=0}^{n}a_{ik}\times b_{kj}\quad\forall i\in[\![1\,;m]\!]\quad;\quad\forall j\in[\![1\,;p]\!]$$

f6410

Vérifier les égalités suivantes :

a) $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\5\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}3&1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\3&2\\4&3\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5\\13&6\end{pmatrix}$

E.5 Effectuer les produits suivants de matrices :

a) $\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-1\\0&2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&-2&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&3&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$

E.6 Effectuer les produits de matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix}2&1&-1\\-3&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&4\\1&-1\\2&1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}5&2\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-3&1\end{pmatrix}$

E.7 Effectuer les produits de matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

E.8 Effectuer les produits de matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

E.9 Effectuer les produits de matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

E.10 Effectuer les produits matriciels suivants :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

E.11 Une entreprise nécessite chaque année des fournitures de bureau pour faire fonctionner ses départements "*administratifs*" et "*productions*". Le tableau ci-dessous recense ses besoins pour une année en milliers d'unités :

	Rames de feuilles (M_1)	Stylo (M_2)	Tubes de colle (M_3)
Administration (D_1)	3	4	1
Production (D_2)	1	2	3

Un appel d'offres est lancé auquel répondent deux entreprises. Le tableau ci-dessous représente le prix unitaire en euros de chacun des fournitures nécessaires à cette entreprise :

	Rames de feuilles (M_1)	Stylo (M_2)	Tubes de colle (M_3)
Fournisseur PasTropCher (F_1)	2	3	1
Fournisseur BonPrix (F_2)	3	1	2

1. a) Écrire la matrice $A=(a_{ij})$ où le coefficient a_{ij} est la quantité du matériel M_j nécessaire au département D_i.
   b) Écrire la matrice $B=(b_{ij})$ où le coefficient b_{ij} est le prix proposé par le fournisseur F_j pour le matériel M_i.
2. Effectuer le produit matriciel suivant : $A \cdot B$.
3. a) Afin de réaliser des économies, quel fournisseur l'entreprise doit choisir.
   b) Pour ce fournisseur, donner le montant de l'achat des fournitures de bureau.

4. *Multiplication et matrice identitée*

E.12

Définition : on appelle **matrice identité d'ordre n** ($n \in \mathbb{N}^*$) la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients ont pour valeur 1 sur la diagonale principale et 0 ailleurs. On la note $\boldsymbol{I_n}$.

Pour $I_n=(a_{ij})$, on a : $\begin{cases} a_{ii} = 1 & \forall i \in [\![1;n]\!] \\ a_{ij} = 0 & \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \text{ et } i \neq j \end{cases}$

1. Effectuer les produits matriciels suivants :

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
2. Que peut-on donner comme caractéristique à une matrice ne comportant que des 1 sur sa diagonale principale et des zéros ailleurs?

E.13 On souhaite déterminer l'ensemble des matrices carrées de dimensions 2 vérifiant : $A^2=I_2$

Pour cela, on considère la matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont quatre réels quelconques.

1. a) Exprimer la matrice A^2 en fonction des réels a, b, c et d.
   b) Déterminer un système d'équations vérifié par les réels a, b, c et d.
2. Pour étudier ce problème, nous allons effectuer une disjonction de cas :
   a) Si $b=0$, exprimer la matrice A en fonction du réel c.
   b) Si $b \neq 0$, exprimer la matrice A en fonction des réels a et b.

5. *Commutativité de la multiplication*

E.14

Définition : soit A et B deux matrices carrées d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), on dit que le produit des matrices A et B est **commutatif** si :

$A \cdot B = B \cdot A$

1. Effectuer les deux produits matriciels suivants :

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. Effectuer les deux produits matriciels suivants :

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) Peut-on obtenir une règle sur les produits $A{\cdot}B$ et $B{\cdot}A$ de deux matrices?

E.15 On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Démontrer que : $A{\cdot}B = 0$

(2) Déterminer la matrice produit $B{\cdot}A$.

E.16 Pour chaque question, montrer que le produit des matrices A et B est commutatif.

(a) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

E.17 Pour chaque question, vérifier si le produit des matrices A et B est commutatif ou non.

(a) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

6. *Multiplication et résolutions de systèmes d'équations linéaires*

E.18 Soit a et b deux nombres réels vérifiant l'égalité ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs des réels a et b.

E.19 Soit a et b deux nombres réels vérifiant l'égalité ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs des réels a et b.

E.20 Soit a, b et c sont trois nombres réels réalisant l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs des réels a, b c

E.21 Soit a, b et c sont trois nombres réels vérifiant l'égalité :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer la valeur de ces réels.

E.22 Soit a, b et c solutions de l'équation :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des triplets $(a\,;b\,;c)$ solutions de cette équation.

E.23 Soit a, b et c sont trois nombres réels solutions de l'équation :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des triplets $(a\,;b\,;c)$ solutions de cette équation.

7. *Distributivité*

E.24 On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer : $A{+}B$.

(2) (a) Calculer : $(A{+}B)^2$

(b) Calculer : $A^2{+}2{\cdot}A{\cdot}B{+}B^2$

(3) En tenant compte des propriétés algébriques du produit matriciel, donner le développement de l'expression $(A{+}B)^2$.

E.25 Soit A une matrice carrée d'ordre n et la matrice unité I_n d'ordre n.

(1) Développer les expressions suivantes :

(a) $(2{\cdot}A + I_n){\cdot}(I_n - A)$ (b) $(A + 2{\cdot}I_n)^2$

(2) Évaluer chacune de ces deux expressions dans le cas où :

$$n{=}2 \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

E.26 Soit A et B deux matrices d'ordre n dont le produit est commutatif.

1. Développer les expressions suivantes :

   a. $(A+2\cdot B)\cdot(B-A)$ b. $(2\cdot A-B)^2$

2. Dans le cas d'ordre 2, évaluer les deux expressions précédentes avec les deux matrices ci-dessous dont le produit est commutatif :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & -1\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

E.27 On définit les matrices A, B et M par :

$$A=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}8\\ 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}0{,}2 & -0{,}8\\ -0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix} \quad ; \quad M=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}6\end{pmatrix}$$

1. Démontrer que : $M=A+0{,}5\cdot B$
2. Vérifier que $A^2=A$, et que : $A\cdot B=B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
3. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n strictement positif : $A^n=A$

On admet que, pour tout entier naturel n strictement positif : $B^n=B$.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $M^n=A+0{,}5^n\cdot B$.

8. *Puissances n-ième de matrices*

E.28 On considère la matrice : $A=\begin{pmatrix}-3 & -3 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice A^2.
2. En déduire l'expression de A^{101}.

E.29 On considère la matrice : $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

1. Déterminer les matrices A^2 et A^3.
2. En déduire l'expression de A^{50}.

E.30 On considère les deux matrices A et B définies par :

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ -2 & 2 & -4\\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}1 & -3 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}$$

1. Déterminer le carré de chacune de ces matrices.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une expression de A^n et une expression de B^n.

E.31 On considère la matrice : $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

1. Établir l'égalité : $A^3=-8\cdot I_2$.
2. En déduire l'expression de A^{11}.

E.32 On considère les deux matrices A et B définies par :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad B=k\cdot A \quad \text{où } k\in\mathbb{R}.$$

Pour quelles valeurs de k la matrice B vérifie l'égalité : $B^2=B$

9. *Puissances n-ième de matrices, cyclicité et congruence*

E.33 On considère la matrice A définie par :

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de la puissance n-ième de la matrice A.

E.34 On considère la matrice A définie par :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non-nul.

E.35 On considère les matrices A et B définies par :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -3\\ -2 & 2 & 3\\ 2 & -3 & -4\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

1. Déterminer les carrés des matrices A et B.
2. Pour tout entier nature n, déterminer une expression de A^n et une expression de B^n.

E.36 On considère la matrice A définie par : $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de la puissance n-ième de la matrice A.

E.37 On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non-nul.

E.38 On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de la puissance n-ième de la matrice A.

E.39 On considère la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Établir que : $A^3 = 2 \cdot I_3$.
2. Donner une expression de A^n pour tout entier naturel n.

E.40 On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non-nul.

10. *Puissances n-ième de matrices et raisonnement par récurrence*

E.41 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Établir, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E.42 Montrer que pour tout entier naturel non-nul n, on a :

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

E.43 On considère la suite A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2^n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Établir que pour tout entier naturel n non-nul, on a l'égalité :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Indication : on utilisera : $A^{n+1} = A \cdot A^n$

E.44 On considère la matrice B carrée d'ordre 3 définie par :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la relation :

$B^n = B^2$

E.45 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Établir, que pour tout entier naturel n : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$

E.46 Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 4 - 2^{n+2} \\ 3 \times 2^n - 3 & 4 - 3 \times 2^n \end{pmatrix}$$

E.47 Montrer que pour tout entier naturel non-nul n, on a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n} \\ 2^{2n-2} & 2^{2n-1} \end{pmatrix}$$

E.48 Montrer que pour tout entier naturel non-nul n, on a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -2 \times (-1)^n & -3 \times (-1)^n \\ 2 \times (-1)^n & 3 \times (-1)^n \end{pmatrix}$$

E.49 On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. On appelle I la matrice identité d'ordre 2.
   Vérifier que : $A^2 = A + 2 \cdot I$
2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha \cdot A + \beta \cdot I$ où α et β sont des réels.
3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2 \cdot r_n \end{cases}$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $A^n = r_n \cdot A + s_n \cdot I$

11. *Matrice inverse*

E.50

Définition : soit n un entier naturel non-nul et A et B deux matrices carrées d'ordre n.
On dit que la matrice B est **la matrice inverse de la matrice A** si : $A \cdot B = I_n$; $B \cdot A = I_n$

On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les matrices des produits $A{\cdot}B$ et $B{\cdot}A$.
2. Que peut-on dire des matrices A et B ?

E.51 On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les produits $A{\cdot}B$ et $B{\cdot}A$.
2. Que peut-on dire des matrices A et B ?

E.52 On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les produits $A{\cdot}B$ et $B{\cdot}A$.
2. En déduire la matrice inverse de la matrice A.

12. *Matrice inverse et expressions algébriques*

E.53 On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a. Déterminer la matrice $A^2{+}A$.
   b. Exprimer la matrice inverse de A en fonction A et de I_3.
2. En déduire la matrice inverse de la matrice A.

E.54 On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a. Déterminer la matrice $A^2{-}3{\times}A$.
   b. Exprimer la matrice inverse de A en fonction de A et de I_3.
2. En déduire la matrice inverse de la matrice A.

E.55 On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. a. Déterminer la matrice A^2.
   b. Déterminer la matrice $A^2{-}2{\cdot}A$.
   c. En déduire une expression de la matrice inverse de la matrice A en fonction de A et de I_3.
2. En déduire la matrice inverse de la matrice A.

E.56 On donne les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice M^2.

On donne : $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

2. Vérifier que : $M^3 = M^2{+}8{\cdot}M{+}6{\cdot}I_3$
3. En déduire que M est inversible et que :
   $M^{-1} = \frac{1}{6}{\cdot}(M^2 - M - 8{\cdot}I_3)$
4. En déduire la matrice inverse de la matrice M.

13. *Matrice inverses de matrices d'ordre 2*

E.57

Définition :
On considère A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
On appelle **déterminant de la matrice A**, noté **$\det(A)$**, le nombre : $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$

Déterminer le déterminant des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix} \quad ; \quad C=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

E.58

Proposition :

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. La matrice A est inversible si, et seulement si, $\det(A)\neq 0$.

On a alors : $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

Déterminer les inverses des matrices suivantes :

a $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}$

E.59 Établir que chacune des matrices ci-dessous sont inversibles et déterminer l'expression de leurs matrices inverses :

a $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

E.60 Déterminer les inverses des matrices suivantes :

a $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & -4\end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -4\end{pmatrix}$

E.61

1 Soit n un entier naturel non-nul. On considère A et B deux matrices carrées d'ordre n inversible et λ un nombre réel non-nul.

a Montrer que le produit $A\cdot B$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.

b Montrer que la matrice $\lambda\cdot A$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.

2 On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Montrer que la relation suivante est fausse :

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$$