Terminale Option Experte / Opérations sur les matrices

1. Addition

E.1

Définition : soit m, n deux entiers naturels non-nuls $(m,n\in\mathbb{N}^*)$. On considère deux matrices A et B de dimensions $m\times n$ et on note respectivement a_{ij} et b_{ij} leurs coefficients.
La **somme des matrices A et B** est la matrice de dimensions $m\times n$ notée $\boldsymbol{A+B}$ dont les coefficients c_{ij}, sont définis par :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i\in[\![1\,;m]\!] \quad ; \quad \forall j\in[\![1\,;n]\!]$$

Effectuer les additions de matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

E.2 Effectuer les opérations suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Multiplication par un réel et addition

E.3

Définition : soit λ un nombre réel $(\lambda\in\mathbb{R})$ et A une matrice de dimension $m\times n$ $(m,n\in\mathbb{N}^*)$ dont les coefficients sont notés a_{ij}
On appelle **produit de la matrice A par le scalaire $\boldsymbol{\lambda}$**, la matrice de dimensions $m\times n$ notée $\boldsymbol{\lambda\cdot A}$ et dont les coefficient b_{ij} sont définis par :

$$b_{ij} = \lambda\cdot a_{ij} \quad \forall i\in[\![1\,;m]\!] \quad ; \quad \forall i\in[\![1\,;m]\!]$$

Effectuer les opérations suivantes :

a. $2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b. $4\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Multiplication

E.4

Définition : soit m, n, p trois entiers naturels non-nuls $(m,n,p\in\mathbb{N}^*)$.
On considère les deux matrices A et B de dimensions respectives $m\times n$ et $n\times p$. Le **produit de la matrice A par la matrice B** est une matrice de dimensions $m\times p$ dont les coefficiens c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\times b_{kj} \quad \forall i\in[\![1\,;m]\!] \quad ; \quad \forall j\in[\![1\,;p]\!]$$

r641-0

Vérifier les égalités suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$

E.5 Effectuer les produits suivants de matrices :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

E.6 Effectuer les produits de matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

E.7 Effectuer les produits de matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

E.8 Une entreprise nécessite chaque année des fournitures de bureau pour faire fonctionner ses départements "*administratifs*" et "*productions*". Le tableau ci-dessous recense ses besoins pour une année en milliers d'unités :

	Rames de feuilles (M_1)	Stylo (M_2)	Tubes de colle (M_3)
Administration (D_1)	3	4	1
Production (D_2)	1	2	3

Un appel d'offres est lancé auquel répondent deux entreprises. Le tableau ci-dessous représente le prix unitaire en euros de chacun des fournitures nécessaires à cette entreprise :

	Rames de feuilles (M_1)	Stylo (M_2)	Tubes de colle (M_3)
Fournisseur PasTropCher (F_1)	2	3	1
Fournisseur BonPrix (F_2)	3	1	2

1. a. Écrire la matrice $A=\left(a_{ij}\right)$ où le coefficient a_{ij} est la quantité du matériel M_j nécessaire au département D_i.

   b. Écrire la matrice $B=\left(b_{ij}\right)$ où le coefficient b_{ij} est le prix proposé par le fournisseur F_j pour le matériel M_i.

2. Effectuer le produit matriciel suivant : $A\cdot B$.

3. a. Afin de réaliser des économies, quel fournisseur l'entreprise doit choisir.

   b. Pour ce fournisseur, donner le montant de l'achat des fournitures de bureau.

4. *Multiplication et matrice identitée*

E.9

Définition : on appelle **matrice identité d'ordre n** *($n\in\mathbb{N}^*$)* la matrice carré d'ordre n dont les coefficients ont pour valeur 1 sur la diagonale principale et 0 ailleurs. On la note $\boldsymbol{I_n}$.

Pour $I_n=\left(a_{ij}\right)$, on a : $\begin{cases} a_{ii} = 1 & \forall i\in[\![1;n]\!] \\ a_{ij} = 0 & \forall (i,j)\in[\![1;n]\!]^2 \text{ et } i\neq j \end{cases}$

1. Effectuer les produits matriciels suivants :

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

2. Que peut on donner comme caractéristique à une matrice ne comportant que des 1 sur sa diagonale principale et des zéros ailleurs?

5. *Commutativité de la multiplication*

E.10

Définition : soit A et B deux matrices carrés d'ordre n *($n\in\mathbb{N}^*$)*, on dit que le produit des matrices A et B est **commutatif** si :
$A\cdot B=B\cdot A$

1. Effectuer les deux produits matriciels suivants :

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Effectuer les deux produits matriciels suivants :

   a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Peut-on obtenir une règle sur les produits $A\cdot B$ et $B\cdot A$ de deux matrices?

E.11 On considère les deux matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que : $A\cdot B=0$
2. Déterminer la matrice produit $B\cdot A$.

6. *Multiplication et résolutions de systèmes d'équations linéaires*

E.12 Soit a et b deux nombres réels vérifiant l'égalité ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs des réels a et b.

E.13 Soit a, b et c sont trois nombres réels réalisant l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs des réels a, b c

E.14 Soit a, b et c solutions de l'équation :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des triplets $(a\,;b\,;c)$ solutions de cette équation.

7. *Distributivité*

E.15 On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer : $A+B$.
2. a. Calculer : $(A+B)^2$
   b. Calculer : $A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$
3. En tenant compte des propriétés algébriques du produit matriciel, donner le développement de l'expression $(A+B)^2$.

E.16 Soit A une matrice carrée d'ordre n et la matrice unité I_n d'ordre n.

1. Développer les expressions suivantes :
   a. $(2\cdot A + I_n)\cdot(I_n - A)$ b. $(A + 2\cdot I_n)^2$
2. Évaluer chacune de ces deux expressions dans le cas où :
   $n=2 \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

8. *Puissances n-ième de matrices*

E.17 On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice A^2.
2. En déduire l'expression de A^{101}

E.18 On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les matrices A^2 et A^3.
2. En déduire l'expression de A^{50}.

E.19 On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Établir l'égalité : $A^3 = -8\cdot I_2$
2. En déduire l'expression de A^{11}

9. *Puissances n-ième de matrices, cyclicité et congruence*

E.20 On considère la matrice A définie par :
$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de la puissance n-ième de la matrice A.

E.21 On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non-nul.

E.22 On considère les matrices A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les carrés des matrices A et B.
2. Pour tout entier nature n, déterminer une expression de A^n et une expression de B^n.

E.23 On considère la matrice A définie par :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de de la puissance n-ième de la matrice A.

E.24 On considère la matrice A définie par : $A=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de de la puissance n-ième de la matrice A.

10. *Puissances n-ième de matrices et raisonnement par récurrence*

E.25 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Établir, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

E.26 Montrer que pour tout entier naturel non-nul n, on a :

$$\begin{pmatrix}4 & -4\\ 3 & -3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

E.27 On considère la matrice B carrée d'ordre 3 définie par :

$$B=\begin{pmatrix}\frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la relation :
$B^n = B^2$

E.28 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Établir, que pour tout entier naturel n : $A^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 2^n-1 & 1\end{pmatrix}$

E.29 Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{pmatrix}5 & -4\\ 3 & -2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^{n+2}-3 & 4-2^{n+2}\\ 3\times2^n-3 & 4-3\times2^n\end{pmatrix}$$

11. *Matrice inverse*

E.30

Définition : soit n un entier naturel non-nul et A et B deux matrices carrées d'ordre n.
On dit que la matrice B est **la matrice inverse de la matrice A** si : $A\cdot B=I_n$; $B\cdot A=I_n$

On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 1 & -2 & -5\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

1. Déterminer les matrices des produits $A{\cdot}B$ et $B{\cdot}A$.
2. Que peut-on dire des matrices A et B?

E.31 On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

1. Déterminer les produits $A{\cdot}B$ et $B{\cdot}A$.
2. Que peut-on dire des matrices A et B?

12. *Matrice inverse et expressions algébriques*

E.32 On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

1. a. Déterminer la matrice A^2+A.
   b. Exprimer la matrice inverse de A en fonction A et de I_3.
2. En déduire la matrice inverse de la matrice A.

E.33 On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

1. a. Déterminer la matrice $A^2-3\times A$.
   b. Exprimer la matrice inverse de A en fonction de A et de I_3.
2. En déduire la matrice inverse de la matrice A.

13. *Matrice inverses de matrices d'ordre 2*

E.34

Définition :

On considère A la matrice définie par : $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On appelle **déterminant de la matrice A**, noté **$\det(A)$**, le nombre : $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$

Déterminer le déterminant des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

E.35

Proposition :

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La matrice A est inversible si, et seulement si, $\det(A)\neq 0$.

On a alors : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Déterminer les inverses des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

E.36 Établir que chacune des matrices ci-dessous sont inversibles et déterminer l'expression de leurs matrices inverses :

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

E.37

1. Soit n un entier naturel non-nul. On considère A et B deux matrices carrées d'ordre n inversible et λ un nombre réel non-nul.
   a) Montrer que le produit $A{\cdot}B$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.
   b) Montrer que la matrice $\lambda{\cdot}A$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.
2. On considère les deux matrices A et B suivantes :
   $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

   Montrer que la relation suivante est fausse :
   $\left(A + B\right)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

