Terminale Option Experte / Pgcd, nombres premiers entre eux, théorème de Bezout et de Gauss

1. Proprietes des nombres premiers

E.1 Préciser si les entiers suivants sont premiers ou non :

a) 37 b) 127 c) 541 d) $2\times3\times5\times7+1$

E.2 Établir que pour tout entier naturel k $(2\leqslant k\leqslant n)$, l'entier $n!+k$ n'est pas un entier premier.

E.3 Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Vérifier que : $S(6)=12$ et calculer $S(7)$.
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $S(n)\geqslant 1+n$

   b) Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n)=1+n$?

2. Factorisation et nombres premiers

E.4 Soit $a\in\mathbb{N}$, considérons l'expression : (E) : a^4-3a^2+1

1. Établir l'égalité suivante :
   $a^4-3a^2+1=\left(a^2-a-1\right)\cdot\left(a^2+a-1\right)$
2. a) Résoudre les équations suivantes :
   $a^2-a-1=1 \quad ; \quad a^2+a-1=1$

   b) Déterminer pour quelle*(s)* valeur*(s)* de a, l'expression (E) définit un entier premier.

E.5 Pour a un entier naturel, on considère l'expression :
(F) : a^3-5a

Justifier que l'entier (F) ne peut pas être un nombre premier.

E.6

1. Soit x un nombre réel.

   a) Montrer que : $x^4+4=\left(x^2+2\right)^2-4\cdot x^2$

   b) En déduire que x^4+4 peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficient entiers.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux entiers suivants :
   $A=n^2-2n+2 \quad ; \quad B=n^2+2n+2$

   a) Montrer que n^4+4 n'est pas premier.

   b) Montrer que, tout diviseur de A qui divise également n est un diviseur du nombre 2.

   c) Montrer que, tout diviseur commun de A et de B, divise $4n$.

3. Nombres premiers et congruence

E.7 Soit p un entier premier supérieur ou égal à 5.

1. Justifier que l'entier p vérifie l'une des deux conditions suivantes :
   $p\equiv1 \pmod{6} \quad ; \quad p\equiv5 \pmod{6}$
2. Justifier que l'entier p^2-1 est divisible par 24.

E.8 On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

"*Les entiers dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers?*"

Pour tout entier naturel $p\geqslant2$, on pose $N_p=1...1$ où 1 apparaît p fois. On rappelle dès lors que :

$N_p=10^{p-1}+10^{p-2}+\cdots+10^0$.

1. Les entiers $N_2=11$, $N_3=111$, $N_4=1111$ sont-ils premiers?
2. Prouver que $N_p=\dfrac{10^p-1}{9}$. Peut-on être certain que 10^p-1 est divisible par 9?
3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.
   On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,
   $x^n-1=\left(x-1\right)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)$

   a) On suppose que p est pair et on pose $p=2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que N_p est divisible par $N_2=11$.

   b) On suppose que p est un multiple de 3 et on pose $p=3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que N_p est divisible par $N_3=111$.

   c) On suppose p non premier et on pose $p=k\cdot q$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
   En déduire que N_p est divisible par N_k.
4. Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
   Cette condition est-elle suffisante?

4. PGCD et décomposition en produit de facteurs premiers

E.9

1. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres 1764 et 198.
2. En déduire le PGCD des nombres 1764 et 198.

E.10

Définition : deux entiers sont dits **premiers entre eux**, si l'entier 1 est le seul diviseur commun à ces deux nombres.

Proposition : deux entiers sont premiers entre eux si, et seulement si, leur PGCD a pour valeur 1.

1. Déterminer le $PGCD$ des différents couples d'entiers :

   a. $(15\,;21)$ b. $(18\,;28)$ c. $(15\,;22)$

2. Déterminer si les deux entiers 56 et 45 sont premiers entre eux

E.11 Dans chaque cas, à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers, déterminer le $PGCD$ du couple $(a\,;b)$ d'entiers :

1. $a = 35\times 21 \quad ; \quad b = 36\times 25$
2. $a = 6^2\times 12 \quad ; \quad b = 21^4\times 15^2$
3. $a = 35\,280^{201} \quad ; \quad b = 6\,804^{131}$

5. Propriété caractéristique du PGCD

E.12 Déterminer l'ensemble des couples $(m\,;n)$ d'entiers naturels tels que :

$$\mathrm{pgcd}(m\,;n)=6 \quad ; \quad m+n=72$$

E.13 Déterminer l'ensemble des couples $(m\,;n)$ d'entiers naturels vérifiant le système :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} m^2 - n^2 = 5440 \\ \mathrm{pgcd}(m\,;n) = 8 \end{cases}$$

6. PGCD et diviseurs

E.14 On désigne par p un entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n l'entier : $A_n = 2^n + p$.

On note d_n le $PGCD$ de A_n et A_{n+1}

1. Montrer que d_n divise 2^n.
2. Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier.

E.15 Soit n un entier relatif.

1. On note d le pgcd des entiers $9n+4$ et $2n-1$. Justifier que d divise 17.
2. Établir l'équivalence suivante :

$$n \equiv 9 \pmod{17} \iff \mathrm{pgcd}(9n+4\,;2n-1) = 17$$

E.16 Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :
$A(n) = n^4 + 1$

1. Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
2. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
3. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.
4. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:
   $n^8 \equiv 1 \pmod{d}$

7. Réduction du PGCD

E.17

Proposition : *(lemme pour l'algorithme d'Euclide)* soit a et b deux entiers relatifs non-nuls et pour tout entier relatif k tels que $a+k\cdot b$ soit non-nul, on a :
$\mathrm{pgcd}(a\,;b) = \mathrm{pgcd}(a+k\cdot b\,;b)$

1. Déterminer le $PGCD$ de deux entiers naturels pairs consécutifs.
2. Déterminer le $PGCD$ de deux entiers naturels impairs consécutifs.

E.18 Pour tout entier naturel n non nul, on considère les entiers :

$$a_n = 4\times10^n-1 \quad ; \quad b_n = 2\times10^n-1 \quad ; \quad c_n = 2\times10^n+1$$

1. Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.
2. Combien les écritures décimales des entiers a_n et c_n ont-elles de chiffres?
   Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.
3. Montrer, en utilisant la liste des entiers premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.
4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :
   $b_n\times c_n = a_{2n}$.
   En déduire une décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.
5. Montrer que : $\text{pgcd}(b_n\,;c_n)=\text{pgcd}(c_n\,;2)$.
   En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

Liste des entiers premiers inférieurs à 100 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23

29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59

61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97

E.19 On considère deux entiers naturels x et y.

Montrer que si x et y sont premiers entre eux alors il en est de même pour les entiers $2x+y$ et $5x+2y$.

E.20

1. a. En supposant que $a=9p+4q$ et $b=2p+q$, démontrer que les entiers a et b d'une part ; p et q d'autre part ont le même PGCD.
   b. Démontrer que les entiers $9p+4$ et $2p+1$ sont premiers entre eux.
2. Déterminer le PGCD des entiers relatifs $9p+4$ et $2p-1$ en fonction des valeurs de p.

E.21 On considère la suite (F_n) de Fibonacci définie par :

$F_0=0 \quad ; \quad F_1=1 \quad ; \quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \quad$ pour tout $n\neq2$

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, les nombres F_{n+1} et F_n sont premiers entre eux.

8. *Propriété d'homogénéité du PGCD*

E.22

Proposition : *(propriété d'homogénéité)*
Pour ~~tout nombres relatifs a, b, k non-nuls, on a :~~
$\text{pgcd}(k\cdot a\,;k\cdot b) = k\cdot\text{pgcd}(a\,;b)$

Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que :

$\text{pgcd}(a\,;b) = d \quad ; \quad \text{pgcd}(a+b\,;ab) = d'$

Montrer que d est un diviseur de d'.

E.23 Soit a et b deux entiers naturels avec $a>b$. Montrer l'équivalence :

$$\frac{a}{b} \text{ est irréductible} \iff \frac{a-b}{a\cdot b} \text{ est irréductible.}$$

9. *PGCD et ensemble des diviseurs communs*

E.24

Proposition : soit a et b deux nombres relatifs non-nuls.
L'ensemble des diviseurs commun à a et à b est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD.

1. Effectuer la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants :
   $27\times90 \quad ; \quad 20\times21$
2. Déterminer le *PGCD* des entiers 2430 et 420.
3. Donner l'ensemble de diviseurs commun à ces deux entiers.

10. *Identité et Théorème de Bézout*

E.25

Proposition : *(Identité de Bézout)*
Soient a et b deux entiers relatifs. Si d est le PGCD de a et de b alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que :
$u\cdot a + v\cdot b = d$

Théorème de Bézout :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement, si il existe deux entiers relatifs tels que :
$u\cdot a + v\cdot b = 1$

En utilisant le théorème de Bézout, montrer que les couples ci-dessous définissent un couple d'entiers premiers entre eux :

a. $(10\,;3)$ b. $(15\,;11)$ c. $(5\,;17)$

E.26 On considère l'équation diophantienne $x^2-8\cdot y^2=1$ où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solutions de (E).
2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

E.27

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie :

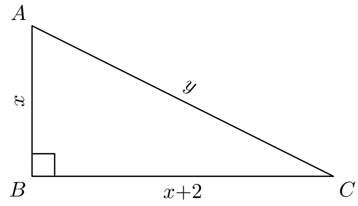
Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

E.28 Soit n un entier relatif. On définit la valeur des entiers a et b en fonction de celle de n par : $a=3n-1 \quad ; \quad b=-2n+1$

Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux quelle que soit la valeur de l'entier naturel n.

E.29 Établir que, quelle que soit la valeur de n, les deux entiers $n+3$ et $-2n^2-n+14$ sont premiers entre eux.

E.30 On considère le triangle ABC rectangle en B, représenté ci-dessous, tel que $BC=AB+2$ et ses mesures soient entières :



On modélise la situation en notant $AB=x$ et $AC=y$.

1. a. Exprimer y^2 en fonction de x sous la forme d'une expression développée et réduite.
   b. En déduire que l'entier y est pair.
2. a. Justifier que $2\cdot x^2+4\cdot x+4$ est un multiple de 4.
   b. En déduire que l'entier x est pair.
3. Compléter l'algorithme ci-dessous nous donnant les valeurs de x et de y *(avec $y<1000$)* réalisant les dimensions de ce triangle :

```
import math
for x in range(...):
    y=math.sqrt(...)
    if math.floor(...)==...:
        print(x,y)
```

11. *Application du théorème de Bezout*

E.31 À chaque lettre de l'alphabet, on associe grâce au tableau ci-dessous un entier compris entre 0 et 25 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

- **Etape 1 :** à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
- **Etape 2 :** on calcule l'entier x' défini par les relations :
  $x' \equiv 9\cdot x+2 \pmod{26} \quad ; \quad 0\leqslant x'\leqslant 25$
- **Etape 3 :** à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.
2. Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9\cdot u+26\cdot v=1$. Donner sans justifier un couple $(u\,;v)$ qui convient.
3. Démontrer que :
   $x'\equiv 9\cdot x+2 \pmod{26}$ équivaut à $x\equiv 3\cdot x'+20 \pmod{26}$
4. Décoder la lettre R.

E.32 Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :
$A(n)=n^4+1$

1. Étudier la parité de l'entier $A(11)$.
2. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
3. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.
4. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:
   $n^8\equiv 1 \pmod{d}$

E.33 On pose : $u=2+\sqrt{3}$ et $v=2-\sqrt{3}$

1. Démontrer par récurrence que, n désignant un entier positif, on peut écrire :
   $$u^n=a_n+b_n\cdot\sqrt{3} \quad ; \quad v^n=a_n-b_n\cdot\sqrt{3}$$
   où a_n et b_n sont des entiers positifs.
   Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Établir les égalités :
   $${a_n}^2-3\cdot{b_n}^2=1 \quad ; \quad a_n\cdot b_{n+1}-a_{n+1}\cdot b_n=1$$
   En déduire que les fractions $\dfrac{a_n}{b_n}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ sont irréductibles.

12. *Théorème de Gauss*

E.34

Théorème de Gauss :
Soit a, b, n trois entiers relatfis non-nuls tels que n divise $a{\cdot}b$.
Si n est premier avec a alors il divise b.

Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;y)\in\mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation : $12{\cdot}x = 13{\cdot}y$

E.35 Soient a et b deux entiers relatifs.

1. Montrer que si $a{\cdot}b \equiv 0 \pmod{47}$ alors $a \equiv 0 \pmod{47}$ ou $b \equiv 0 \pmod{47}$
2. En déduire que si $a^2 \equiv 1 \pmod{47}$ alors $a \equiv 1 \pmod{47}$ ou $a \equiv -1 \pmod{47}$

E.36 On considère le système de congruence :

$$(S) : \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

où n désigne un entier relatif.

1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n-11$ est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11+15{\cdot}k$, où k désigne un entier relatif.

E.37 On considère l'équation (E) définie par :

$$(E) : \quad 17x - 15y = 3$$

où l'ensemble de résolution est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs.

Démontrer que, pour tout couple $(x\,;y)$ solution de (E), x est un multiple de 3.

E.38 Soit x et y deux entiers vérifiant l'égalité :

$$y{\cdot}(y-x) = x{\cdot}(2-x)$$

On suppose que l'entier x est un entier premier.

1. Démontrer que l'entier x divise y.
2. On pose $y = k{\cdot}x$ avec $k\in\mathbb{Z}$:
   a. Montrer que x divise 2, puis que $x=2$.
   b. En déduire les valeurs possibles de k.

E.39 On se propose d'étudier des couples $(a\,;b)$ d'entiers strictement positifs, tels que :

$$a^2 = b^3$$

Soit $(a\,;b)$ un tel couple. On note $d=\text{pgcd}(a\,;b)$ et u, v les deux entiers naturels vérifiant :

$$a = d{\cdot}u \quad ; \quad b = d{\cdot}v.$$

1. Montrer que : $u^2 = d{\cdot}v^3$.
2. En déduire que v divise u, puis, que $v=1$.
3. Soit $(a\,;b)$ un couple d'entiers strictement positifs. Démontrer que l'on a $a^2=b^3$ si, et seulement si, a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

13. *Corollaire A du théorème de Gauss*

E.40

Corollaire : *(du théorème de Gauss)*
Soit a, b, c trois entiers relatifs non-nuls tels que a divise c et que b divise c.
Si les entiers a et b sont premiers entre eux alors le produit $a{\cdot}b$ divise c.

On considère le polynôme $A = n^3 - 6{\cdot}n^2 - n + 6$ où $n\in\mathbb{Z}$.

1. Établir la factorisation :
   $A = (n-6)(n-1)(n+1)$
2. a. Établir que pour tout entier relatif n, l'entier A est divisible par 2.
   b. Établir que pour tout entier relatif n, l'entier A est divisible par 3.
   c. En déduire que pour tout entier relatif n, l'entier A est divisible par 6.

E.41 On considère le polynôme $A = n^3 - 3{\cdot}n^2 + n - 6$ où $n\in\mathbb{Z}$.

1. Établir la factorisation : $A = (n-3)(n^2+2)$
2. Prouver que l'entier A est divisible par 6 pour tout $n\in\mathbb{Z}$

14. *Corollaire B du théorème de Gauss*

E.42

Corollaire : *(du théorème de Gauss)*
Soit a, b, c trois entiers relatifs non-nuls.
Si a et b sont premiers entre eux et si a et c sont premiers entre eux alors a est premiers avec le produit $b{\cdot}c$.

Ce qui peut se traduire par :

$$\left.\begin{array}{l} \text{pgcd}(a\,;b) = 1 \\ \text{pgcd}(a\,;c) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{pgcd}(a\,;b{\cdot}c) = 1$$

On considère le polynôme $6{\cdot}n^3-7{\cdot}n^2-5{\cdot}x+1$ où $n\in\mathbb{Z}$.

1. Établir la factorisation : $A=(6{\cdot}n-1)(n^2-n-1)$

2. Établir que pour tout entier relatif n, l'entier A n'est pas divisible par 6.

15. *Corollaire C du théorème de Gauss*

E.43

Corollaire : *(du théorème de Gauss)*
Soit a, b, c trois entiers relatifs non-nuls tels que p soit un entier premier.
Si p divise le produit $a{\cdot}b$ alors p divise a ou p divise b.

Soient a et b deux entiers relatifs.

1. Montrer que :

$$\text{Si } a{\cdot}b\equiv 0 \pmod{47} \text{ alors } \begin{cases} a\equiv 0 \pmod{47}\\ \text{ou}\\ b\equiv 0 \pmod{47}\end{cases}.$$

2. En déduire que :

$$\text{Si } a^2\equiv 1 \pmod{47} \text{ alors } \begin{cases} a\equiv 1 \pmod{47}\\ \text{ou}\\ a\equiv -1 \pmod{47}\end{cases}.$$

E.44 On considère l'équation :
(F) : $11{\cdot}x^2-7{\cdot}y^2=5$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. a. Démontrer que si le couple $(x\,;y)$ est solution de (F), alors :
$x^2\equiv 2{\cdot}y^2 \pmod{5}$

b. Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2{\cdot}y^2$ par 5?

c. En déduire que si le couple $(x\,;y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

2. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\,;y)$ n'est pas solution de (F).
Que peut-on en déduire pour l'équation (F)?

E.45 On considère l'équation (E) sur les triplets $(x\,;y\,;z)$ définie par : $x^2+y^2=\dfrac{5}{2}{\cdot}z^2$

Considérons un triplet $(x\,;y\,;z)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E) :

1. Vérifier que le triplet $A(1\,;3\,;2)$ est solution de (E).
2. Démontrer que z est divisible par 2 et x^2+y^2 est divisible par 10.
3. Supposons que $y=3$, montrer alors l'équivalence suivante : $x^2\equiv 1 \pmod{10}$
4. Déterminer un triplet $(x\,;y\,;z)$ à valeur entières solutions de (E) où y est un entier impair.

16. *Théorème de Bezout et de Gauss*

E.46

1. Déterminer l'ensemble U des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $2n-1$.
2. Montrer que pour tout entier relatif, les entiers $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.
3. Déterminer l'ensemble V des entiers relatifs $n\neq-2$ tels que $\dfrac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ soit un entier relatif.

E.47 Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un entier naturel non-nul tel que a et p sont premiers entre eux :

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier n non-nul, les entiers a^n et p sont premiers entre eux.
2. Établir l'existence d'un entier naturel n non-nul tel que :
$a^n\equiv 1 \pmod{p}$

17. *Equation diophantienne*

E.48

1. Démontrer que le couple $(-2\,;17)$ est solution de l'équation : $12x+31y=503$
2. En déduire que :
Si un couple d'entiers relatifs $(x\,;y)$ est solution de l'équation $12x+31y=503$ alors le couple vérifie la relation $12{\cdot}(x+2)=31{\cdot}(17-y)$
3. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de l'équation : $12x+31y=503$

E.49 On considère l'équation : $51{\cdot}x-26{\cdot}y=1$
où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple de solution.
2. a. Donner un couple solution $(x_0\,;y_0)$ de cette équation.
   b. Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

E.50 On considère l'équation (E) définit par : (E) : $-7{\cdot}x+25{\cdot}y=1$

1. Déterminer un couple trivial $(x\,;y)$ d'entiers solutions de l'équation (E).
2. En déduire l'ensemble des solutions entières de cette équation (E).

E.51 On considère l'équation (E): $7x-6y=1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

E.52 On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs : (E): $7x-3y=1$

Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Son but est, lors de son exécution pas à pas, de récupérer les valeurs prises par les variables `a` et `b` qui forment des couples solutions de l'équation (E) où `(a ; b)` est un couple d'entiers solution tel que : $-5\leqslant$ `a` $\leqslant 10$; $-5\leqslant$ `b` $\leqslant 10$.

```
Pour X variant de −5 à 10
    (1) ...
        (2) ...
            Alors (a ; b) ← (X ; Y)
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
```

18. *Cours*

E.53 Soient a, b et c trois entiers naturels.
Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors $a{\cdot}b$ divise c.

E.54 Le but de cette partie est de démontrer que l'ensemble des entiers premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini d'entiers premiers notés p_1, p_2, $\dots$, p_n.
   On considère l'entier E produit de tous les entiers premiers augmentés de 1 :
   $E=p_1{\times}p_2{\times}\cdots{\times}p_n+1$
   Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des entiers p_1, p_2, $\dots$, p_n.
2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier, conclure.

E.55 On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que : $\mathrm{pgcd}(b\,;c)=1$

Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

"Si b divise a et c divise a alors le produit $b{\cdot}c$ divise a"

19. *Exercices non-classés*

E.56

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

- **Proposition 1**
  Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de n^2+n n'est jamais égal à 4.
- On considère la suite u définie, pour $n\geqslant 1$, par :
  $u_n=\dfrac{1}{n}{\cdot}\mathrm{pgcd}(20\,;n)$
  Proposition 2 : la suite (u_n) est convergente.

