Terminale Option Experte / Utilisation des matrices

1. Système d'équations linéaires sans calculatrice

E.1 On souhaite résoudre le système suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x + 2z = 7 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

1. a. Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b. Que peut-on dire des solutions de l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2. a. Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

b. En utilisant la question précédente, simplifier l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c. Donner le triplet $(x\,;y\,;z)$ solution du système $(\mathcal{S})$ d'équations.

E.2 On considère les deux matrices A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Effectuer le produit : $A \cdot B$

2. On considère le système ci-dessous de trois équations à trois inconnues :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 3x + 6y - 4z = 13 \\ 2x + 5y - 3z = 11 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des triplets solutions de (S).

2. Système d'équations linéaires avec calculatrice

E.3 On considère le système $(\mathcal{S})$ d'équations défini par :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ -x - 2z = -4 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

1. À l'aide de la calculatrice, donner la matrice inverse de la matrice M où :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. a. On considère la matrice X définie par : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Donner les deux matrices A et B telle que l'équation matricielle $A \cdot X = B$ ait les mêmes solutions que le système $(\mathcal{S})$.

b. Donner l'ensemble des solutions du système (S).

E.4

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'inverse de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = -4 \\ 3x - y - z = -5 \end{cases}$$

E.5

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'inverse de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y - 2z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

CC BY-NC

E.6 Résoudre le système d'équations ci-dessous en utilisant un logiciel de calcul formel et les matrices :

$$(S) : \begin{cases} 3x - 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + z = -2 \\ -2x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

E.7 Résoudre le système d'équations ci-dessous en utilisant un logiciel de calcul formel et les matrices :

$$(S) : \begin{cases} 2x - 3y + z = -8 \\ -3x + 2y - 3z = 3 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

E.8 Résoudre le système d'équations ci-dessous en utilisant un logiciel de calcul formel et les matrices :

$$(S) : \begin{cases} -x - 3y - 2z = -1 \\ -3x - 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y - z = -1 \end{cases}$$

3. *Système d'équations linéaires et modélisation*

E.9 L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$C(x) = a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + c{\cdot}x + 10 \qquad \text{où } \begin{cases} a, b \text{ et } c \text{ sont des} \\ \text{nombres réels.} \end{cases}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

Justifier que le triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution du système $(\mathcal{S})$.

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = 17{,}4 \\ 125a + 25b + 5c = 73 \end{cases}$$

E.10 L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$C(x) = a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + c{\cdot}x + 10 \qquad \text{où } \begin{cases} a, b \text{ et } c \text{ sont des} \\ \text{nombres réels.} \end{cases}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution du système $(\mathcal{S})$.

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = 17{,}4 \\ 125a + 25b + 5c = 73 \end{cases}$$

On pose : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

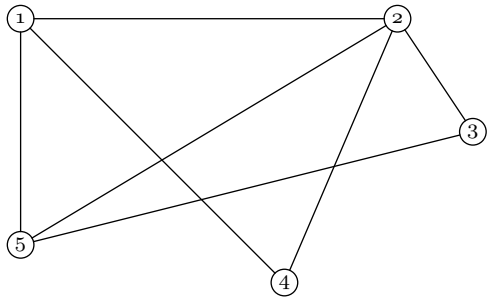
1. a. Écrire ce système sous la forme $M{\cdot}X = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

   b. On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet $(a\,;b\,;c)$ solution du système $(\mathcal{S})$.

2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?

 CC BY-NC

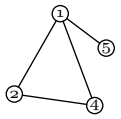
E.11 Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches.
Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-dessous où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.

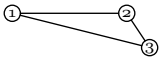


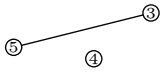
1 a Donner, sans justifier, le degré de chacun des sommets *(la réponse pourra être présentée sous forme de tableau où les sommets seront mis dans l'ordre numérique)*.

b Donner la matrice M associée au graphe *(les sommets seront mis dans l'ordre numérique)*.

2 Parmi les graphes ci-dessous, lesquels représentent un sous-graphe du graphe de départ :

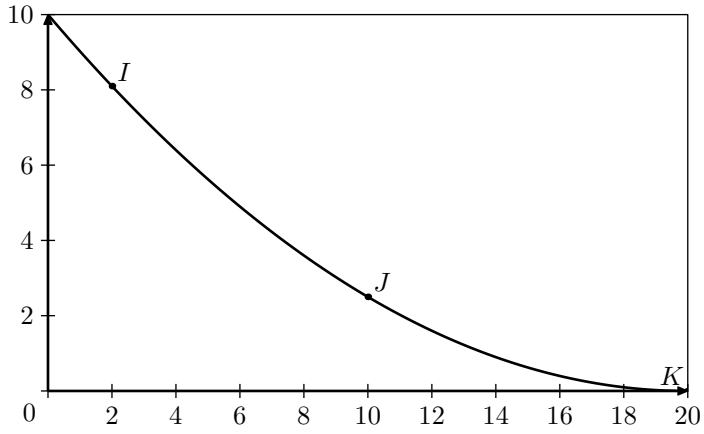
a


b


c


On ne justifiera sa réponse que dans le cas où on n'est pas en présence d'un sous-graphe.

3 On installe un toboggan géant sur l'arbre 4.
La forme de ce toboggan est modélisée par une fonction f dont la courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Cette courbe passe par les points I, J et K de coordonnées respectives $(2\,;8{,}1)$, $(10\,;2{,}5)$ et $(20\,;0)$.

La fonction f est définie sur $[0\,;20]$ par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$
où a, b et c sont trois nombres réels.

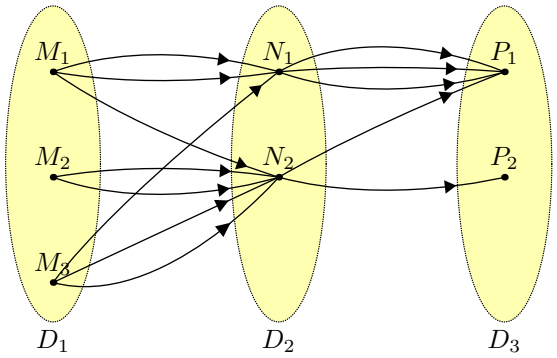
a Justifier que a, b et c sont solutions du système :
$$\begin{cases} 400a + 20b + c = 0 \\ 100a + 10b + c = 2{,}5 \\ 4a + 2b + c = 8{,}1 \end{cases}$$

b Déterminer les matrices X et V pour que le système précédent soit équivalent à :
$$U \cdot X = V \quad \text{où } U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c Déterminer a, b et c.

4. *Graphes et chemins de longueurs p*

E.12 Le graphe ci-dessous représentent les villes principales des départements D_1, D_2 et D_3 et les axes routiers les reliant.



1 a Combien de chemins permettent de relier la ville M_1 à la ville P_1 ?

b Combien de chemins permettent de relier la ville M_3 à la ville P_2 ?

2 a Donner la matrice $A=(a_{ij})$ où le coefficient a_{ij} représente "*le nombre de route reliant la ville M_i avec la ville N_j*" pour $i \in [\![1;3]\!]$ et $j \in [\![1;2]\!]$.

b Donner la matrice $B=(b_{ij})$ où le coefficient b_{ij} représente "*le nombre de route reliant la ville N_i avec la ville P_j*" pour $i \in [\![1;2]\!]$ et $j \in [\![1;2]\!]$.

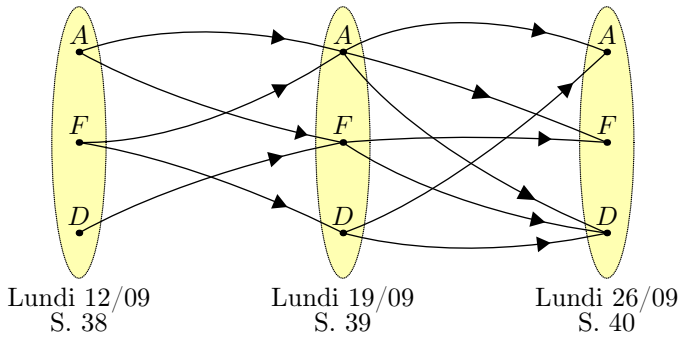
3 a Donner la matrice $C=(c_{ij})$ de dimension 3×2 obtenue par le produit de la matrice A par la matrice B.

b Donner les valeurs des coefficients c_{11} et c_{32}.

4 Quelle conjecture peut-on émettre en comparant les résultats des questions 1 et 3 ?

 CC BY-NC

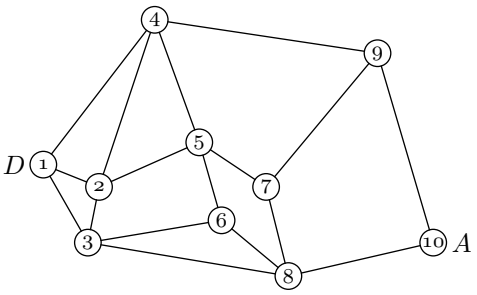
E.13 Trois amies Abondance, Fortune et Désirée *(on les considèrera dans cet ordre tout au long de l'exercice)* s'échangent chaque début de semaine leur produit de maquillage. Dans le graphe ci-dessous, est représenté les différentes possibilités d'échanges entre deux semaines :



1. a. Combien de possibilités d'échanges permettent à Abondance de retrouver ses produits de maquillage en début de semaine 40?
   b. Combien de possibilités d'échanges permettent à Fortune d'avoir, en semaine 40, les produits de maquillages d'Abondance en semaine 38?
2. a. On note M la matrice représentant les échanges entre la semaine 38 et la semaine 39. Plus précisément, le coefficient m_{ij} représente le nombre de possibilité d'échanges au cours de la première semaine entre la $i^{\text{ième}}$ amie et la $j^{\text{ième}}$ amie.
   b. On note N la matrice représentant les échanges au cours de la seconde semaine. Plus précisément, le coefficient n_{ij} représente le nombre d'échange au cours de la seconde semaine entre la $i^{\text{ième}}$ amie et la $j^{\text{ième}}$ amie.
3. On note $P = (p_{ij})$ la matrice, carrée d'ordre 3, produit de la matrice M par la matrice N :
   a. Donner la matrice C.
   b. Donner les valeurs des coefficients p_{11} et p_{22}.
4. En comparant les résultats des questions 1 et 3 b, quelle conjecture peut-on émettre?

E.14 Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux. La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-dessous. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.

1. Départ
2. Passerelle
3. Roche percée
4. Col des 3 vents
5. Pic rouge
6. Refuge
7. Col vert
8. Pont Napoléon
9. Cascade des anglais
10. Arrivée



1. Donner un itinéraire allant de D à A passant par tous les sommets du graphe une seule fois, mais n'empruntant pas forcément tous les sentiers.
2. Existe-t-il un itinéraire allant de D à A utilisant tous les sentiers une seule fois?
   Justifier votre réponse.
3. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique. On donne M^5.

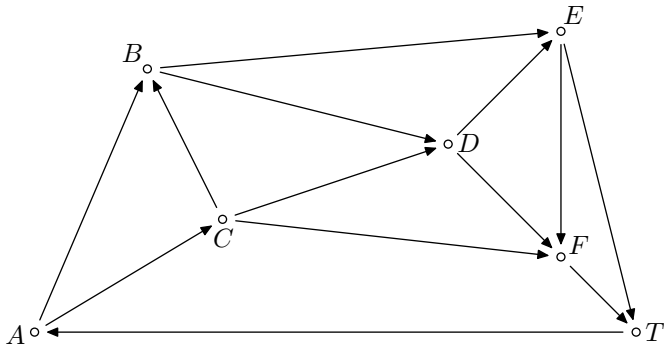
$$M^5 = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\ 78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\ 75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 46 & 73 & 52 & 23 \\ 82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\ 59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\ 57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\ 54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\ 40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\ 26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\ 31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2 \end{pmatrix}$$

   a. Que représente le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et la quatrième colonne?
   b. Déterminer le nombre d'itinéraires allant de D à A empruntant 5 sentiers. Citer un tel itinéraire passant par le pic rouge.

E.15 Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées *taxiways*.

Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation *(les "taxiways")* et les sommets du graphe sont les intersections.

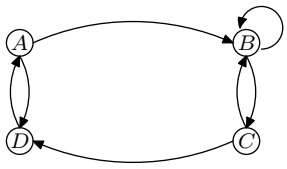
Ce graphe est orienté pour indiquer le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies :



1. Écrire la matrice M associée à ce graphe *(ranger les sommets dans l'ordre alphabétique)*.
2. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur du coefficient $(1\,;7)$ de M^3.
3. Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T.

E.16

On considère le graphe ci-contre.



1. Donner la matrice M d'adjacence de ce graphe. *(on considérera les sommets du graphe à l'aide de l'ordre alphabétique)*.
2. À l'aide de la calculatrice, donner l'expression de la matrice M^4.

 CC BY-NC

5. *Suites définies conjointement*

E.17 On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par les relations :

$$u_0=0 \quad ; \quad v_0=1 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3} \end{cases} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer les valeurs des termes u_2 et v_2.

2. On considère la matrice M : $\quad M=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

   a. Vérifier, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}=M\cdot\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

   b. Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'identité pour pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M^n\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   c. À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs des termes u_{10} et v_{10}.

E.18 On considère les deux suites réelles (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7\cdot a_n + 0{,}6\cdot b_n \\ b_{n+1} = 0{,}3\cdot a_n + 0{,}4\cdot b_n \end{cases}$$

Pour tout entier n naturel, on définit la matrice-colonne U_n définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice T réalisant pour tout entier naturel n l'égalité suivante : $\quad U_{n+1} = T\cdot U_n$

2. On suppose que : $\quad a_0=\dfrac{2}{3}$ et $b_0=\dfrac{1}{3}$.

   a. Déterminer les valeurs de a_1 et b_1 à l'aide de la relation matricielle établie à la question 1.

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement des suites (a_n) et (b_n) ?

3. On suppose que : $\quad a_0=0{,}3$ et $b_0=0{,}7$.

   a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a la relation :
   $U_n = T^n\cdot U_0$

   b. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel, déterminer l'expression des matrices U_2, U_3 et U_5 à 10^{-6} près.

   c. Que peut-on conjecturer sur le comportement des suites (a_n) et (b_n) ?

6. *Matrice diagonalisable et suites*

E.19 On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3} \end{cases} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On définit la suite de matrice (X_n) par la relation $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

On considère la matrice A définie par : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

1. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $X_{n+1} = A\cdot X_n$

   b. Démontrer par récurrence la relation suivante pour tout entier naturel n :
   $X_n = A^n\cdot X_0$

2. On définit les matrices P et P' :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \quad ; \quad P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   a. Montrer que les matrices P et P' sont inversibles.

   b. Déterminer la matrice B diagonale réalisant l'égalité suivante :
   $P'\cdot B\cdot P = A$

   c. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
   $A^n = P'\cdot B^n\cdot P$

3. a. Donner l'expression de la matrice B^n en fonction de n.

   b. Établir que la matrice X_n admet pour expression, pour tout entier naturel n : $\quad X_n=\begin{pmatrix} \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$

4. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

7. *Exercices non-classés*

E.20 On considère la suite (F_n) de Fibonacci définie par :
$u_0=0 \quad ; \quad u_1=1 \quad ; \quad F_{n+1}=F_n+F_{n-1} \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

On note U_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. Donner la matrice carrée A d'ordre 2 à coefficients réels qui vérifie :

 CC BY-NC

$$U_{n+1} = U_n \cdot A$$

2 On considère les deux matrices :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\cdot(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{4+(1+\sqrt{5})^2}} & \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{4+(1-\sqrt{5})^2}} \\ \frac{2}{\sqrt{4+(1+\sqrt{5})^2}} & \frac{2}{\sqrt{4+(1-\sqrt{5})^2}} \end{pmatrix}$$

a Montrer que la matrice P est inversible, puis déterminer sa matrice inverse.

b Établir que : $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

c En déduire une expression du terme F_n en fonction de n.

Formule de Binet : *(1843)*
Pour tout entier naturel n, le terme F_n de rang n de la suite de Fibonacci a pour valeur :

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \cdot \sqrt{5}}$$

 CC BY-NC