Terminale Spécialité / Annales sur les équations différentielles

1. Anciennes annales (avant 2012)

E.1 Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle $]0\,;1]$.

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle :
   (E_λ) : $y' = y^2 + \lambda\cdot y$ et la condition $y(0)=1$.

   On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$.
   On pose sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$: $z = \dfrac{1}{y_0}$

   Écrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.

2. **Question de cours** : PRE-REQUIS

   Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda\cdot y$ sont les fonctions :
   $x \longmapsto C\cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}$
   où C est une constante réelle.

   a. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle :
      (E'_λ) : $z' = -(\lambda\cdot z + 1)$
      telle que : $z(0)=1$

   b. Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$.

3. a. Démontrer que : $\ln(1+\lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$.
      On pourra étudier sur $]0\,;1]$ *la fonction* f *définie par :*
      $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$.

   b. En déduire que : $\dfrac{1}{\lambda}\cdot\ln(1+\lambda) > \dfrac{1}{2}$.

4. En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$.
   Démontrer alors que (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

E.2 QCM : pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 0,75 point, chaque erreur enlève 0,25 point, l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.

Répondre sur votre copie en indiquant le numéro de la question et la lettre correspondant à votre réponse :

1. L'équation $\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} - 4 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. 0 solution	b. 1 solution
c. 2 solutions	d. plus de 2 solutions

2. L'expression $-\mathrm{e}^{-x}$

a. n'est jamais négative	b. est toujours négative
c. n'est négative que si x est positif	d. n'est négative que si x ets négatif

3. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{2\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+2} =$

a. $-\dfrac{1}{2}$	b. 1
c. 2	d. $+\infty$

4. L'équation différentielle $y = 2y' - 1$ a pour ensemble de solutions :

a. $x \mapsto k\mathrm{e}^{2x} - 1$ avec $k\in\mathbb{R}$	b. $x \mapsto k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + 1$ avec $k\in\mathbb{R}$
c. $x \mapsto k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 1$ avec $k\in\mathbb{R}$	d. $x \mapsto k\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{2}$ avec $k\in\mathbb{R}$

E.3 **Partie A : une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \ y' - 3y = \frac{-3e}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}$$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}\varphi(x)$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.
2. Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\varphi(0) = \frac{e}{2}$.

Partie B : étude d'une fonction

Soit f la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique $2\,cm$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f.
2. Tracer $\mathscr{C}$.
3. Pour α réel non nul, on pose : $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx$
   a. Donner le signe et une interprétation graphique de I_α en fonction de α.
   b. Exprimer I_α en fonction de α.
   c. Déterminer la limite de I_α lorsque α tend vers $+\infty$.

Partie C : etude d'une suite

On définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite (u_n) par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}dx$

où f est la fonction définie dans la **partie B.**

On ne cherchera pas à calculer u_n.

1. a. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}$, le signe de u_n.
   b. Donner le sens de variation de la suite (u_n).
   c. La suite (u_n) est-elle convergente?
2. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:
   $$I_1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\cdot I_1$$
   où I_1 est l'intégrale de la **partie B** obtenue pour α égal à 1.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n). Donner sa valeur exacte.

E.4 **Partie A**

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(20x+10\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right)$ *(unité graphique 1 cm).*

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
5. Calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle : $(E) : y' + \frac{1}{2}\cdot y = 20\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
   a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\,;+\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle :
   $$(E') : y' + \frac{1}{2}\cdot y = 0$$
   b. Résoudre l'équation différentielle (E').
   c. Conclure.
3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale? Le résultat sera arrondi à la minute.
4. La valeur θ en degré Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$.
   Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

E.5 Les parties A et B sont indépendantes.
Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t *(exprimé en années à partir de l'origine 2000)*.

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle : $(E):\ y' = -\dfrac{1}{20}\cdot y\cdot(3-\ln y)$

1. Démontrer l'équivalence suivante :
   une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, vérifie $f'(t)=-\dfrac{1}{20}f(t)\left[3-\ln\big(f(t)\big)\right]$, pour tout t de $[0\,;+\infty[$
   si, et seulement si,
   la fonction $g=\ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $g'(t)=\dfrac{1}{20}g(t)-\dfrac{3}{20}$
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :
   $(H):\ z' = \dfrac{1}{20}z - \dfrac{3}{20}$.
3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0\,;+\infty[$:
   $f(t) = \exp\left[3 + C\cdot\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right]$
   (la notation exp *désigne la fonction exponentielle naturelle $x \longmapsto e^x$)*
4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :
   $f(t) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right]$
   a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.
   c. Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $f(t)<0{,}02$.
   Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : “*La population testée comporte* 50 % *d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans* 99 % *des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans* 0,1 % *des cas*”.

On note M l'événement “*l'animal est malade*”, $\overline{M}$ l'événement contraire et T l'événement “*le test est positif*”.

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.
2. En déduire $P(T)$.
3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable?

E.6 **Partie A**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$

1. Démontrer que : $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.
2. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle :
   $(E_1):\ y' = \dfrac{y}{4}$
   a. Résoudre l'équation différentielle (E_1).
   b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t=0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0)=1$.
   c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois?
2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t *(exprimé en années)* dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :
   $$(E_2):\ \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{\left[u(t)\right]^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$
   pour tout nombre réel t positif ou nul et où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.
   a. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t)>0$. On considère, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la fonction h définie par $h=\dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions.
   $$(E_3):\ \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$
   pour tout nombre réel t positif ou nul.
   b. Donner les solutions de l'équation différentielle :
   $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$
   et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.
   c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

E.7 On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C) : \begin{cases} f(-x)\cdot f'(x) = 1 \text{ pour tout nombre réel } x \\ f(0) = -4 \end{cases}$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $g(x) = f(-x)f(x)$
   a. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer la fonction dérivée de la fonction g.
   c. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.
   d. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \dfrac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.
2. **Question de cours**
   a. On sait que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \longmapsto K\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.
   b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 et 0.
3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser qu'elle est cette fonction.

E.8 Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A :

On considère l'équation différentielle : (E) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\cdot\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle :
   (E) : $y' + y = 0$
   Résoudre l'équation différentielle (E').
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v-u$ est solution de l'équation différentielle (E').
4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B :

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :
$f_k(x) = (x + k)\cdot\mathrm{e}^{-k}$
où k est un nombre réel donné. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en : $x = 1-k$.
2. On note M_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1-k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.
3. Sur le graphique donné en annexe 1 *(à rendre avec la copie)*, le repère est orthogonal, mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les nombres des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
   - la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.
   - la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $y = (x+k)\cdot\mathrm{e}^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

   a. Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 *(à rendre avec la copie)*.
   b. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :
   $$\int_0^2 (x+2)\cdot\mathrm{e}^{-x}dx.$$
   Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

E.9

1. *Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.*

   On suppose connu le résultat suivant :
   La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$. Soit a un réel donné.

   a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = a{\cdot}y$.

   b. Soit g une solution de l'équation $y' = a{\cdot}y$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x){\cdot}\mathrm{e}^{-a\cdot x}$. Montrer que h est une fonction constante.

   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $y' = a{\cdot}y$.

2. On considère l'équation différentielle : (E) : $y' = 2y + \cos x$.

   a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f_0(x) = a{\cdot}\cos x + b{\cdot}\sin x$
   soit une solution f_0 de (E).

   b. Résoudre l'équation différentielle : (E_0) : $y' = 2y$.

   c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

   d. En déduire les solutions de (E).

   e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

E.10

1. Résoudre l'équation différentielle : $2{\cdot}y' + y = 0 \quad (E)$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle :
   $2{\cdot}y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}{\cdot}(x+1) \qquad (E')$

   a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}{\cdot}\big(m{\cdot}x^2 + p{\cdot}x\big)$ soit solution de (E')

   b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que g est solution de l'équation (E') si, et seulement si, $g - f$ est solution de l'équation (E).
   Résoudre l'équation (E').

3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $h(x) = \dfrac{1}{4}{\cdot}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}{\cdot}\big(x^2 + 2x\big)$.

4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\big(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,\big)$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$

   a. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ.

   b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

