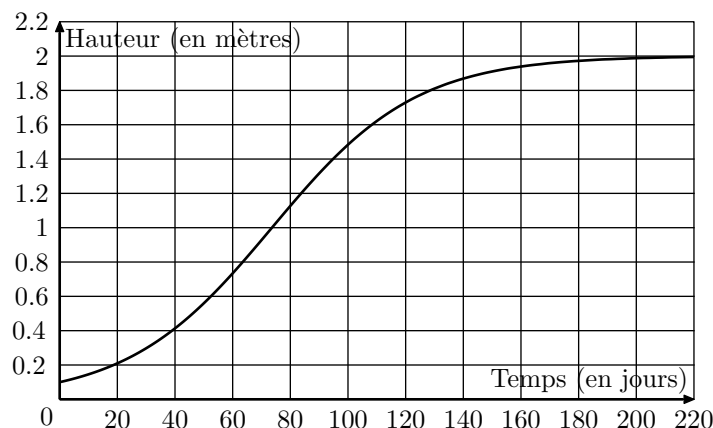


Terminale Spécialité / Annales sur l'intégration

1. Aires et études de fonctions

E.1 Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-dessous représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.



On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure $0,1\text{ m}$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m .

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0; 250]$ par :

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19 \cdot e^{-0,04t}}$$

- ① Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f).

En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 250]$.

- ② Déterminer le nombre de jours nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5\text{ m}$.

- ③ a) Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; 250]$, on a : $f(t) = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$.

Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 250]$ par $F(t) = 50 \cdot \ln(e^{0,04t} + 19)$ est une primitive de la fonction f .

- b) Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50; 100]$.

En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

- ④ On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ;

elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f . La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t .

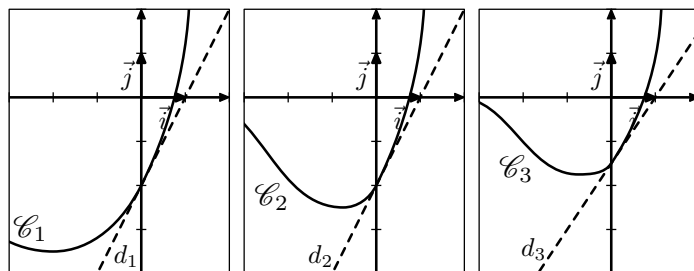
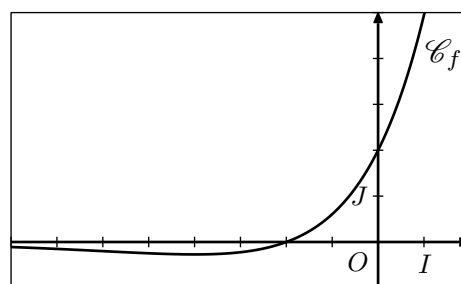
En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur de celle-ci, arrondie au millimètre près.

Estimer alors la hauteur du plant.

- E.2 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et trois autres courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



- Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
- On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
 - L'une des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F . Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + 2) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

- ① L'observation de la courbe $\mathcal{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

- a) Démontrer que pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + 4) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

- b) En déduire une validation de la conjecture précédente.

- ② On pose : $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- (a) Interpréter géométriquement le réel I .
 (b) Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$$

Vérifier que : $f = 2 \cdot (u' \cdot v + u \cdot v')$.

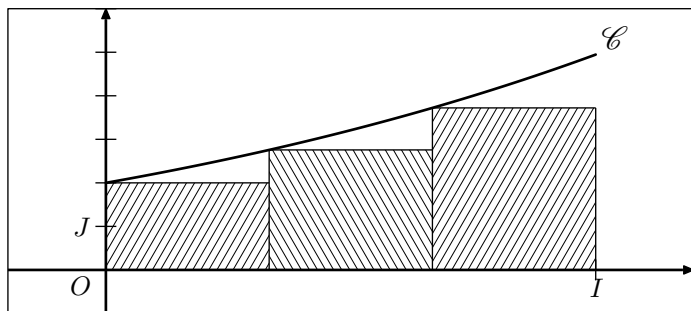
- (c) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .
 (3) On donne la fonction f de l'algorithme ci-dessous :

```

Fonction f(n)
  s ← 0
  Pour k allant de 0 à n-1
    s ← s + 1/n · f(k/n)
  Fin de boucle
  Renvoyer s
  
```

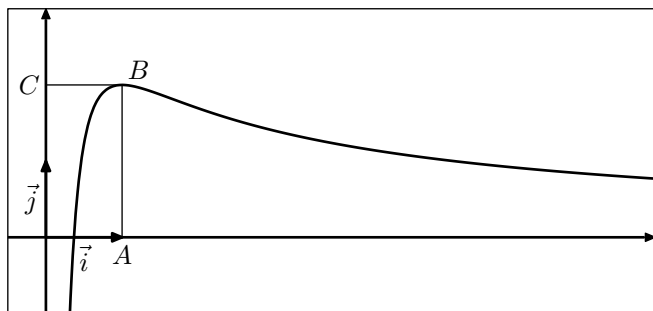
On note s_n le nombre renvoyé par la fonction f lorsqu'elle est appelée avec l'entier n strictement positif.

- (a) Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



- (b) Que dire de la valeur renvoyée par la fonction f lorsque la valeur passée en argument n , lors de l'appel, devient grand?

E.3 Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A , B , C ont pour coordonnées respectives $(1;0)$, $(1;2)$, $(0;2)$;
- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x : $f(x) = \frac{a+b \cdot \ln x}{x}$

- (1) (a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
 (b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x :

$$f'(x) = \frac{(b-a) - b \cdot \ln x}{x^2}$$

- (c) En déduire les réels a et b .
 (2) (a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
 (b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif : $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \cdot \frac{\ln x}{x}$
 (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f .
 (3) (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; 1]$.
 (b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1; +\infty[$ tel que : $f(\beta) = 1$.
 Déterminer l'entier n tel que : $n < \beta < n+1$

- (4) On donne l'algorithme ci-dessous :

```

a ← 0
b ← 1
Tant que b-a > 0;1
  m ← 1/2 · (a+b)
  Si f(m) < 1
    Alors
      a ← m
    Sinon
      b ← m
  Fin de Si
Fin de Tant que
  
```

- (a) Exécuter pas à pas cet algorithme et compléter dans le tableau ci-dessous les valeurs prises successivement par les variables a , b et m .

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

- (b) Que représentent les valeurs des variables a et b lors de la fin de l'exécution de cet algorithme?
 (c) Modifier l'algorithme ci-dessous pour que les valeurs a et b en fin d'exécution de l'algorithme soient les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1} .
 (5) Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.
 (a) Justifier que cela revient à démontrer que : $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 1$
 (b) En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

2. Aires, études de fonctions et suites

E.4 Partie A - Étude préliminaire d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2-x)e^x - 1$.

- 1 Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2 Montrer que la fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.
En déduire les variations de la fonction φ et préciser les valeurs de $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.
- 3 Prouver que la fonction φ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β . On prendra $\alpha < \beta$. Étudier alors le signe de la fonction φ sur l'ensemble des réels et récapituler cette étude dans un tableau.
- 4 À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} des valeurs α et β .
- 5 Montrer que: $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$

Partie B - Étude d'une fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ et calcul intégral.

- 1 Montrer que $e^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- 2 Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
- 3 Calculer la dérivée f' de la fonction f puis, à l'aide des résultats de la **partie A**, construire le tableau des variations de f .
- 4 Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$, le nombre α étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction φ de la partie **A** s'annule.
- 5 Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 0,01 près de l'intégrale:

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x} dx$$

Partie C - Étude de deux suites.

- 1 Préciser l'ensemble de définition D_g de la fonction g définie sur cet ensemble par $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.
Prouver que la fonction g est croissante sur son ensemble de définition et que l'image par g de l'intervalle

$I = [-2; 0]$ est incluse dans cet intervalle.

- 2 a Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par:

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

Montrer que u_1 appartient à l'intervalle $I = [-2; 0]$. Prouver par récurrence, à l'aide des variations de la fonction g , que la suite (u_n) a tous ses termes dans l'intervalle I et est croissante.

- b On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par:

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$

Calculer le terme v_1 et montrer que:

$$-2 \leq u_1 \leq v_1 \leq v_0 \leq 0.$$

Établir par récurrence, à l'aide de la croissance de la fonction g sur l'intervalle $[-2; 0]$, que pour tout entier naturel n strictement positif, on a:

$$-2 \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq 0$$

Préciser le sens de variation de la suite (v_n) .

- 3 a Soit m la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par:

$$m(x) = x - \ln(1+x)$$

Montrer que m est croissante et calculer $m(0)$. En déduire que, pour tout x positif, on a:

$$\ln(1+x) \leq x$$

- b Vérifier que, pour tout entier n :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right).$$

En déduire que: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}$

Sachant que, pour tout entier n , les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $[-2; 0]$, donner un

encadrement de $\frac{1}{2 - v_n}$ et établir que:

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (v_n - u_n)$$

Prouver alors que, pour tout entier naturel n ,

$$v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (v_0 - u_0)$$

Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $v_n - u_n$ et pour les suites (u_n) et (v_n) ?

- 4 Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-4} de u_{10} et v_{10} .

3. Aire entre deux courbes

E.5 Partie A

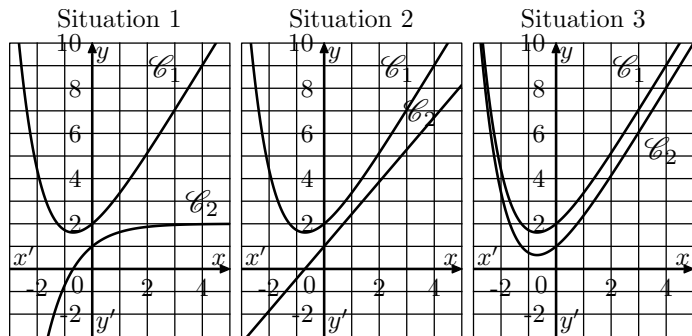
f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f .

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f' .

Le point A de coordonnées $(0; 2)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$.

Le point B de coordonnées $(0; 1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_2$.

- 1 Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de la fonction f . Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathcal{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracé convenablement. Laquelle? Expliquer le choix effectué.



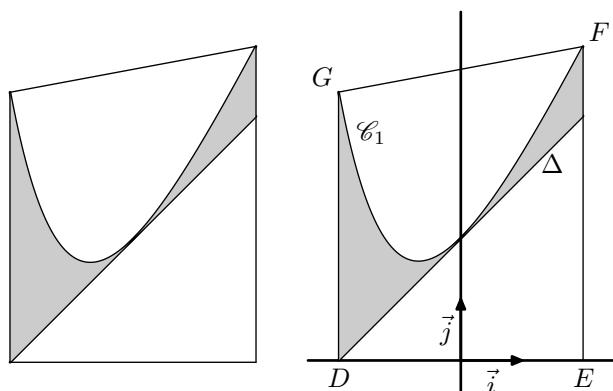
- 2 Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ en A.
- 3 On sait que pour tout réel x , $f(x) = e^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
 - a Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.
 - b Prouver que $a = 2$.
- 4 Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 5 Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - (x+2)$.

- 1 a Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.
- b En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}_1$ par rapport à la droite Δ

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathcal{C}_1$ et de la droite Δ , comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.



Le contour du logo est représenté par le trapèze $DEFG$ où :

- D est le point de coordonnées $(-2; 0)$,
- E est le point de coordonnées $(2; 0)$,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}_1$,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathcal{C}_2$.

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ , la courbe $\mathcal{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

- 2 Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).

E.6 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x ; \quad g(x) = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

- 1 Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
- 2 Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ .
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - x - 2$
 - a Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.
 - b Justifier que, pour tout réel x non-nul :

$$h(x) = x \cdot \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x} \right).$$
 En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.
 - c On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x .
 - d Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
 - e En déduire que, pour tout réel x : $2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x - 1$
 - f Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ ?
- 3 Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
 - a Pour tout réel x , développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2$.
 - b Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- 4 Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

E.7 Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = (x^2 + x + 1) \cdot e^{-x} - 1$$

- 1 a Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b Étudier le sens de variations de φ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
- 2 Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1; +\infty[$, qui sera notée α .
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
- 3 En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B : étude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

Sur la feuille annexe sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g . Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

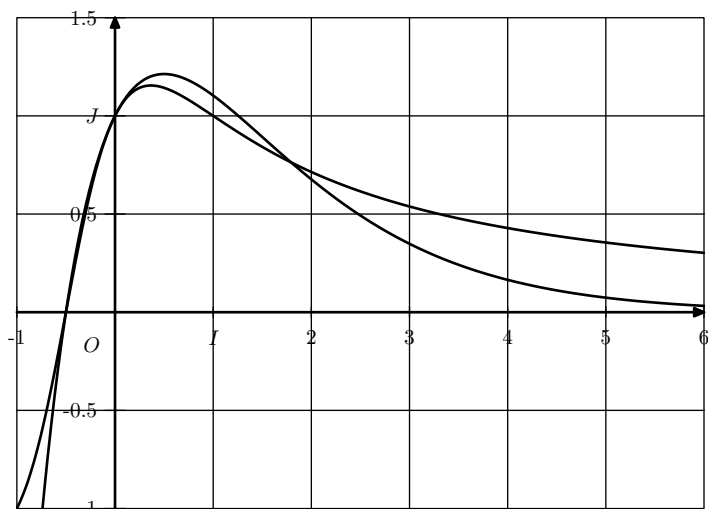
$$f(x) = (2x + 1) \cdot e^{-x} \quad ; \quad g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ sont notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

- 1 a Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et admettent en ce point la même tangente.
- b Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x + 1) \cdot \varphi(x)}{x^2 + x + 1}$$
 où φ est la fonction étudiée dans la **partie A**.
- c à l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- d En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- 2 a Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (-2x - 3) \cdot e^{-x} - \ln(x^2 + x + 1)$$
 est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$.
- b En déduire l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} de cette aire.



E.8 Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x^2} \quad ; \quad g(x) = x^2 e^{-x^2}$$

On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

- 1 Identifier $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur la figure fournie. (*Justifier la réponse apportée*).
- 2 Étudier la parité des fonctions f et g (hors programme).
- 3 Étudier le sens de variation de f et g . Étudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.
- 4 Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Partie B

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$$

- 1 Que représente G pour la fonction g ?
- 2 Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.
- 3 Étudier le sens de variations de G sur $\mathbb{R}$.

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{pour tout réel } x$$

- 4 Démontrer que :

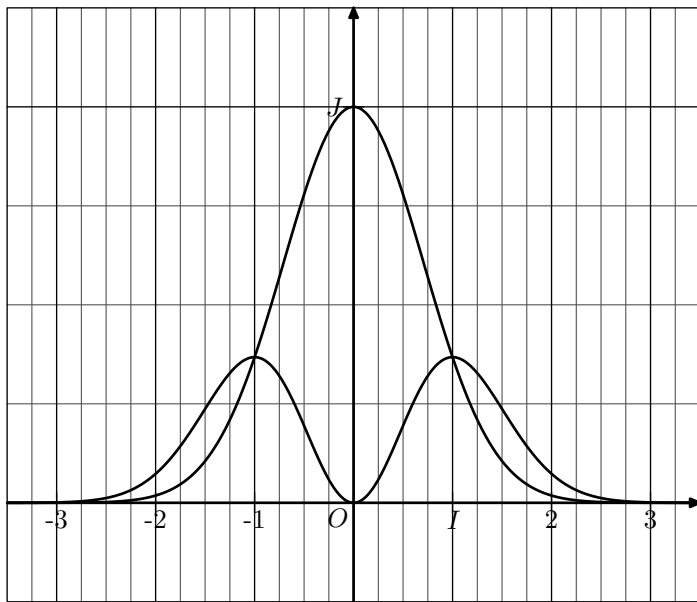
$$G(x) = \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}] \quad \text{pour tout réel } x$$
 (on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de G et de $x \mapsto \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}]$).

On admet que la fonction F admet une limite finie ℓ en $+\infty$, et que cette limite ℓ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{A}$ limité par la courbe $\mathcal{C}_f$ et les demi-droites $[O; \vec{i})$ et $[O; \vec{j})$.

- 5 a Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.
- b Interpréter en termes d'aires le réel :

$$N = \int_0^1 (1 - t^2) e^{-t^2} dt.$$
- c En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire $\mathcal{P}$ en unités d'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la demi-droite $[O; \vec{i})$ et la courbe $\mathcal{C}_g$, justifier graphiquement que :

$$\int_0^1 (1 - t^2) e^{-t^2} dt \geq \frac{\ell}{2}$$
 (on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie)



E.9 Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$$

et l'on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 3 cm.

- ① Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?
- ② Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f pour x appartenant à $[0; +\infty[$.
- ③ Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse 0.
- ④ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique u . Montrer que u appartient à $[1; 2]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u .
- ⑤ Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ sur la même figure.
- ⑥ **a** Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq 1$:

$$\frac{x-1}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$$
b En déduire l'aire en cm^2 du domaine plan limité par (T) , $(\mathcal{C})$ et la droite d'équation $x=1$ (on admettra que T est au-dessus de $(\mathcal{C})$).

Partie B

n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$$

- ① Calculer $f'_n(x)$ et donner son signe sur $[0; +\infty[$. Préciser $f_n(0)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
Dresser le tableau de variations de f_n .
- ② **a** Calculer $f_n(n)$; quel est son signe?
b Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$e^{n+1} > 2 \cdot n + 1$$
En déduire le signe de $f_n(n+1)$.
c Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique sur $[n; n+1]$; cette solution est notée u_n .
- ③ Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$.

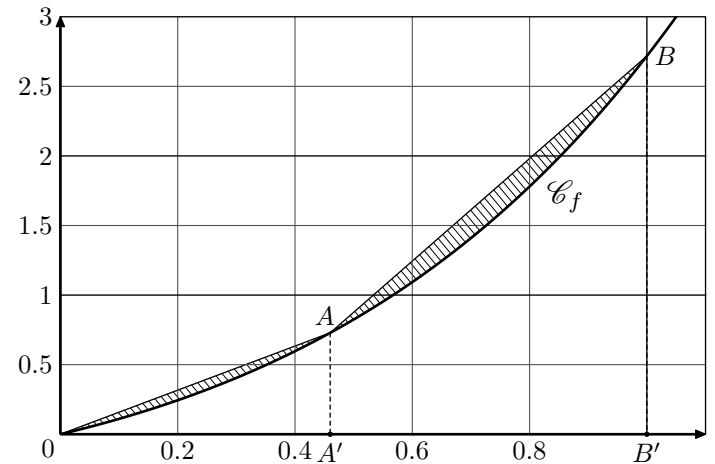
- ④ **a** En remarquant que, pour tout x de $[0; +\infty[$:

$$\frac{x-n}{x+n} = 1 - \frac{2 \cdot n}{x+n}$$
Montrer que la valeur moyenne M_n de f_n sur $[0; u_n]$ est égale à :

$$1 - \frac{1}{u_n} + \frac{e^{-n}}{u_n} - 2 \cdot \left(\frac{n}{u_n}\right) \cdot \ln\left(\frac{u_n}{n} + 1\right)$$
b En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

E.10 Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = x \cdot e^x$
On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.



Sur la courbe $\mathcal{C}$, tracée ci-dessus, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments $[OA]$ et $[AB]$. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments $[OA]$ et $[AB]$ et la courbe $\mathcal{C}$. On a placé les points :
 $A'(a; 0)$; $B'(1; 0)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachuré en annexe est minimale.

Partie A :

- ① **a** Montrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie par :

$$F(x) = (x-1) \cdot e^x$$
b Établir que : $\int_0^1 x \cdot e^x dx = 1$
- ② **a** Donner l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze $ABB'A'$ est égale à :

$$\frac{1}{2} \cdot (-a^2 \cdot e^a + a \cdot e^a - a \cdot e + e)$$
b En déduire que l'aire de la partie du plan hachurée est égale à :

$$\frac{1}{2} \cdot (a \cdot e^a - a \cdot e + e - 2)$$

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x \cdot (e^x - e) + e - 2$$

- ① Soit g' la fonction dérivée de la fonction g . Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0; +\infty[$.
Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g''(x) = (2+x) \cdot e^x$$
- ② En déduire les variations de la fonction g' sur $[0; +\infty[$.

- ③ Établir que l'équation $g'(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
- ④ En déduire les variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$.
- ⑤ En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale.
Donner cette valeur de a .

E.11 Partie A

On donne le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$ 0	$\nearrow$ $4e^{-2}$	$\searrow$ 0

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par: $F(x) = \int_2^x f(t) dt$

- ① Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
- ② Montrer que: $0 \leq F(3) \leq 4 \cdot e^{-2}$

Partie B

La fonction f considérée dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^2 e^{-x}$

On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = e^{-x}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

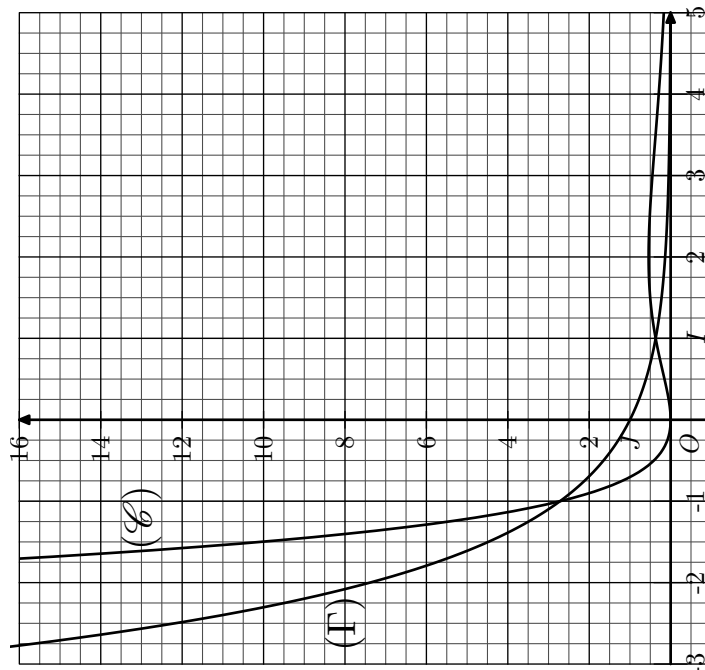
Les courbes sont tracées en annexe.

- ① a) Montrer que les variations de la fonction f sont bien celles données dans la partie A. On ne demande pas de justifier les limites.
- b) Étudier les positions relatives des courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) .
- ② Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$
- a) Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$H(x) = (-x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x}$$

est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

- b) Soit un réel α supérieur ou égal à 1.
On considère la partie du plan limitée par les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.
- c) Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.
- ③ On admet que, pour tout réel m strictement supérieur à $4e^{-2}$, la droite d'équation $y=m$ coupe la courbe $(\mathcal{C})$ au point $P(x_P; m)$ et la courbe (Γ) au point $Q(x_Q; m)$.
L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_P , appartenant à l'intervalle $]-\infty; -1]$ telle que la distance PQ soit égale à 1.
- a) Faire apparaître approximativement sur le graphique (proposé en annexe) les points P et Q tels que: $x_P \in]-\infty; -1]$ et $PQ=1$.
- b) Exprimer la distance PQ en fonction de x_P et x_Q .
Justifier l'égalité: $f(x_P) = g(x_Q)$.
- c) Déterminer la valeur de x_P telle que: $PQ=1$.



4. Avec des fonctions trigonométriques

E.12 Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est noté $Re(z)$.

- ① Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe: $u = 1 - i$.
- ② Déterminer, pour tout réel θ , la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $e^{i\theta} \cdot (1 - i)$.
- ③ Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ :
 $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

Partie B

Dans cette partie, on admet que, pour tout réel θ :

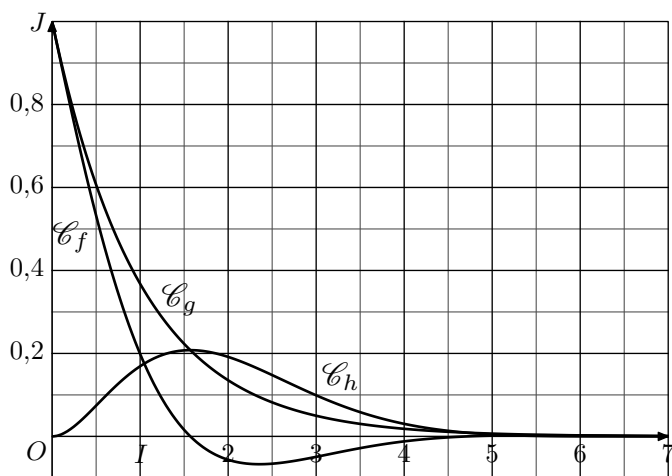
$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par:

$$f(x) = e^{-x} \cdot \cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0; +\infty[$ par: $h(x) = g(x) - f(x)$

Les représentations graphiques de $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ des fonctions f , g et h sont données, ci-dessous, dans un repère orthogonal.



- 1 Conjecturer :
 - a les limites des fonctions f et g en $+\infty$.
 - b la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$;
 - c la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est maximal.
- 2 Justifier que $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$
- 3 Démontrer que la droite d'équation $y=0$ est asymptote

horizontale aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

- 4 a On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$h'(x) = e^{-x} \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right]$$
- b Justifier que, sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sqrt{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0$$
 et que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$:

$$\sqrt{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 0$$
- c En déduire le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
- 5 On admet que, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction H définie par :

$$H(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-x} \cdot [-2 + \cos(x) - \sin(x)]$$
 est une primitive de la fonction h .

On note $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=2\pi$.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.

5. Encadrement d'intégrales

E.13 On considère la fonction f , définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{e^t}{t}$$

- 1 a Justifier la continuité de f sur $[1; +\infty[$.
- b Montrer que f est croissante sur $[1; +\infty[$

2 Restitution organisée de connaissances

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

Pour tout réel x_0 de $[1; +\infty[$, on note $\mathcal{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=x_0$.

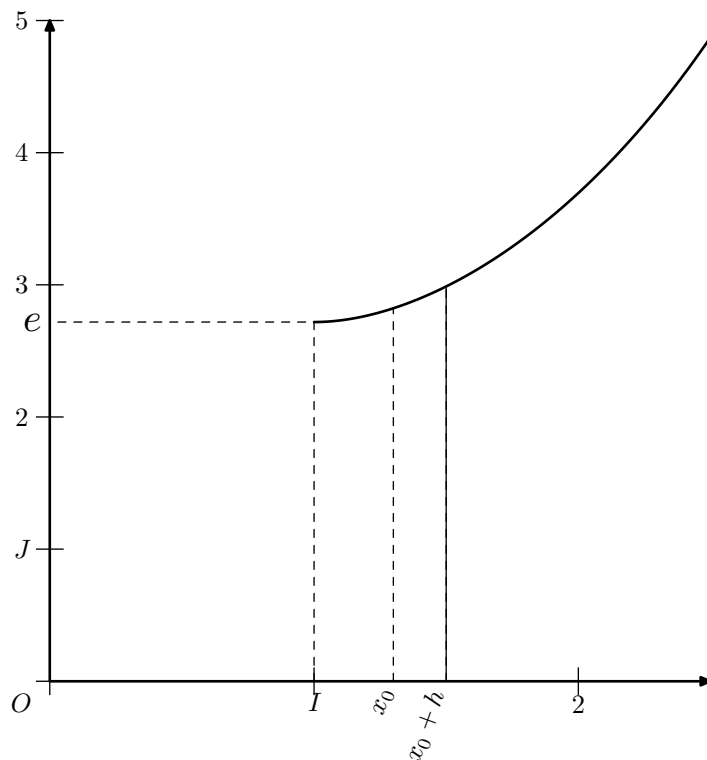
On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1; +\infty[$ est une primitive de f .

- a Que vaut $\mathcal{A}(1)$?
- b Soit x_0 un réel quelconque de $[1; +\infty[$ et h un réel strictement positif.
Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$$
- c Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ tel que $x_0+h \geq 1$?
- d En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathcal{A}$ ainsi

que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathcal{A}$.

- e Conclure.



6. Suites et intégrales de familles de fonctions

E.14 Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + e^{-x}$$

- 1 Justifier que $\mathcal{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0; 1)$.
- 2 Déterminer le tableau de variations de la fonction f_1 . On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

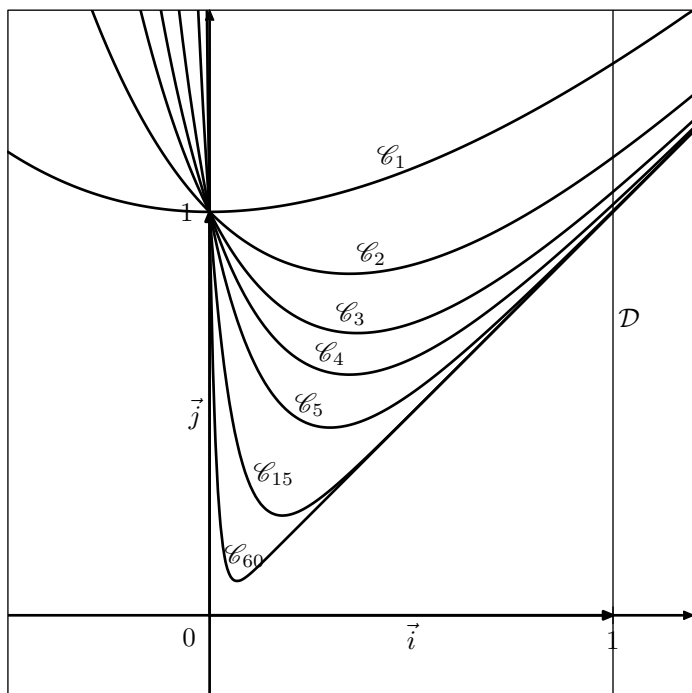
L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 (x + e^{-n \cdot x}) dx$$

- 1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x + e^{-n \cdot x}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x=1$.



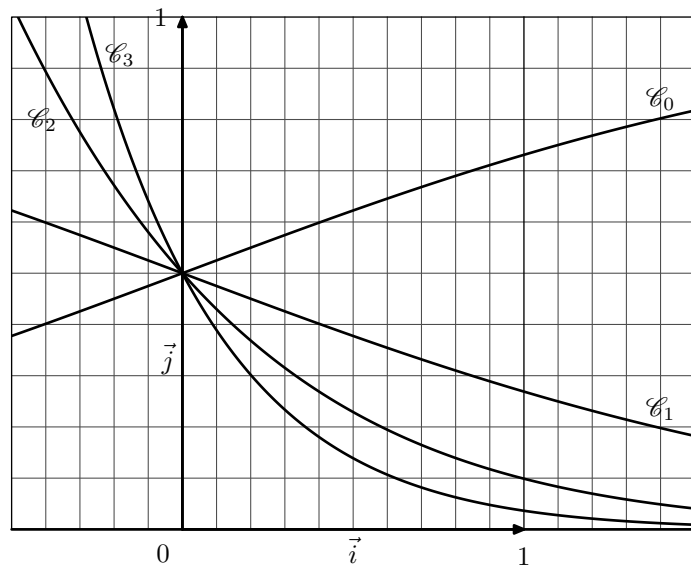
- a Interpréter géométriquement l'intégrale I_n .
- b En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.
- 2 Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1) \cdot x} \cdot (1 - e^x) dx$$
 En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$, puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.
- 3 Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n) .

E.15 Soit n un entier naturel. On note f_n , la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-n \cdot x}}{1 + e^{-x}}$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Partie A : Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathcal{C}_n$.

- 1 Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathcal{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.
- 2 Étude de la fonction f_0 .
 - a Étudier le sens de variation de f_0 .
 - b Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
 - c Dresser le tableau de variations de la fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.
- 3 Étude de la fonction f_1 .
 - a Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x .
 - b En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
 - c Donner une interprétation géométrique de la question 3 a pour les courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
- 4 Étude de la fonction f_n pour $n \geq 2$.
 - a Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout nombre réel x , on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$$
 - b Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - c Calculer la dérivée $f'_n(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude d'une suite liée aux fonctions f_n

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \int_0^1 f_n dx$

- 1 Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0 .
- 2 Démontrer que, pour tout entier n :

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx} dx$$

- 3 Calculer l'intégrale : $\int_0^1 e^{-nx} dx$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

E.16 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle

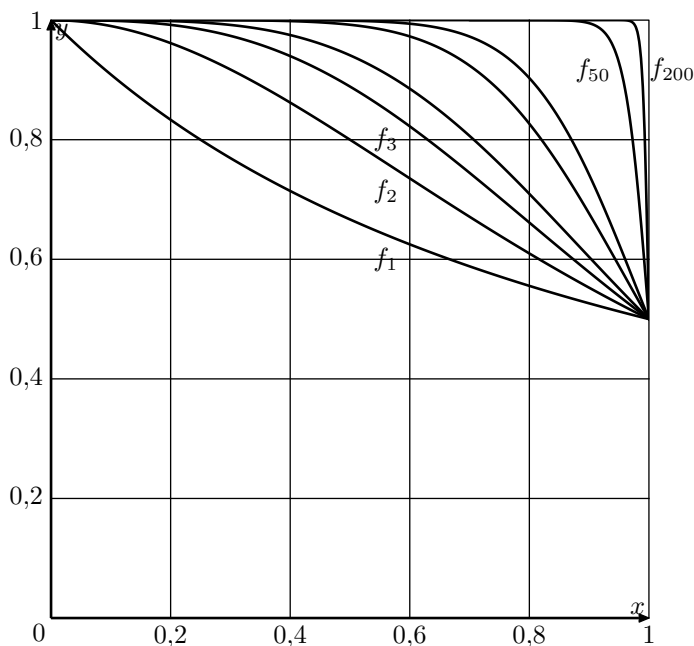
$$[0; 1] \text{ par : } f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le nombre I_n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$$

- 1 Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.

En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.



- 2 Calculer la valeur exacte de I_1 .
- 3 a Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1$$

- b En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $I_n \leq 1$.

- 4 Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$$

- 5 Calculer l'intégrale : $\int_0^1 (1-x^n) dx$.

- 6 à l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

- 7 On considère la fonction f ci-dessous extraite d'un algorithme :

Fonction $f(n,p)$

$I \leftarrow 0$.

Pour k allant de 0 à $p-1$

$x \leftarrow \frac{k}{p}$

$I \leftarrow I + \frac{1}{1+x^n} \times \frac{1}{p}$

Fin Pour

Renvoyer I

- a Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cette fonction lorsqu'on effectue un appel avec pour argument : $n=2$; $p=5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, lors de l'appel à la fonction f . Les valeurs de I seront arrondies au millièm.

k	x	I
0		
4		

- b Expliquer pourquoi la fonction f permet d'approcher l'intégrale I_n .

E.17 Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1) \cdot e^x$$

- 1 Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2 On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout réel x :
- $$f'(x) = (x+2) \cdot e^x$$

- 3 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

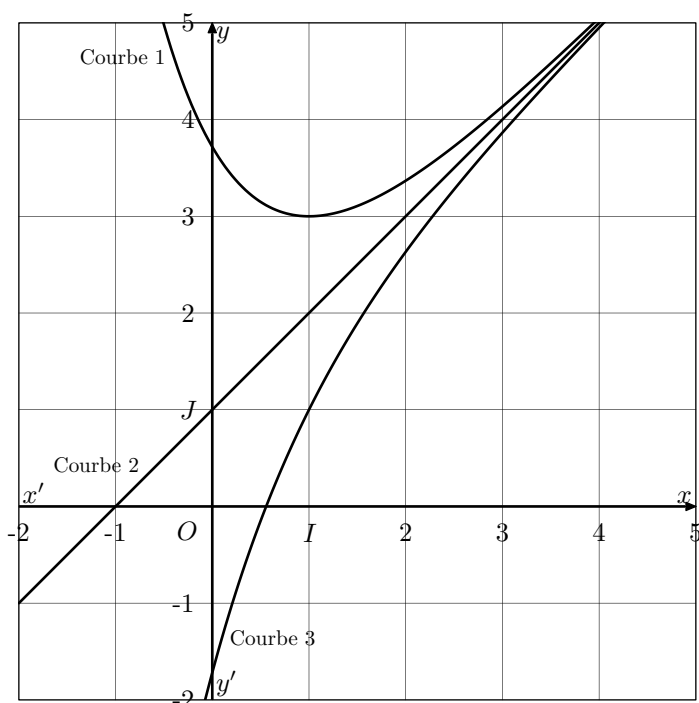
$$g_m(x) = x + 1 - m \cdot e^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

- 1 a Démontrer que $g_m(x) = 0$ si, et seulement si, $f(x) = m$.

- b Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m .

- 2 On a représenté ci-dessous, les courbes $\mathcal{C}_0$; $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{C}_{-e}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs de 0, e et $-e$).



Identifier chacune de ces courbes sur la figure en justifiant.

- 3 Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m .
- 4 a On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_e$, $\mathcal{C}_{-e}$, l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur la figure ci-dessus.
- b Dans cette question, a désigne un réel positif, $\mathcal{D}_a$ la

partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_e$, $\mathcal{C}_{-e}$, l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.

Démontrer que pour tout réel a positif :

$$\mathcal{A}(a) = 2e - 2 \cdot e^{1-a}$$

En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

E.18 Partie A

Restitution organisée de connaissances. On supposera connus les résultats suivants :

$$e^0 = 1 \quad ; \quad \text{pour tous réels } x \text{ et } y : e^x \times e^y = e^{x+y}$$

- 1 Démontrer que pour tout réel x : $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- 2 Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n : $(e^x)^n = e^{n \cdot x}$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-n \cdot x}}{1 + e^{-x}} dx, \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

- 1 a Montrer que : $u_0 + u_1 = 1$.
- b Calculer u_1 . En déduire u_0 .
- 2 Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n \geq 0$.
- 3 a Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.
- b En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$
- 4 Déterminer la limite de la suite (u_n) .

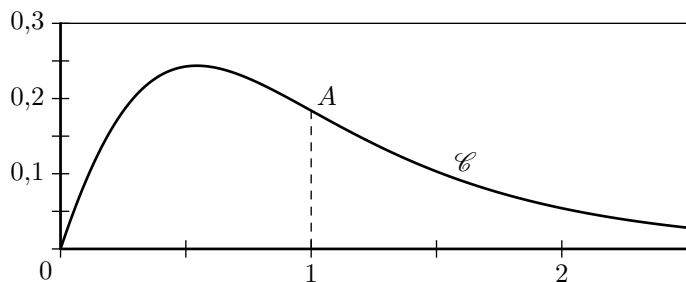
7. Suites et intégrales d'une fonction

E.19 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

La courbe $(\mathcal{C})$, donnée en annexe, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0; +\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0; +\infty[$

La courbe $(\mathcal{C})$ passe par les points O et $A\left(1; \frac{1}{2e}\right)$ et, sur $[0; 1]$, elle est au-dessus du segment $[OA]$.



- 1 Montrer que : $\int_0^1 f'(x) dx = \frac{1}{2 \cdot e}$.
- 2 Montrer que : $\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{1}{4 \cdot e}$

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x \cdot e^{-x}}{x^2 + 1}$$

- 1 Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2 On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$
Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.
- 3 a Montrer que pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.
- b En déduire les variations f sur $[0; +\infty[$.
- 4 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{2n} f(x) dx$
- a Montrer que pour tout x de $[0; +\infty[$: $0 \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$
- b Montrer que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \cdot (e^{-n} - e^{-2n})$.
- c En déduire la limite u_n quand n tend vers $+\infty$.

8. Suites et relations de Chasles

E.20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

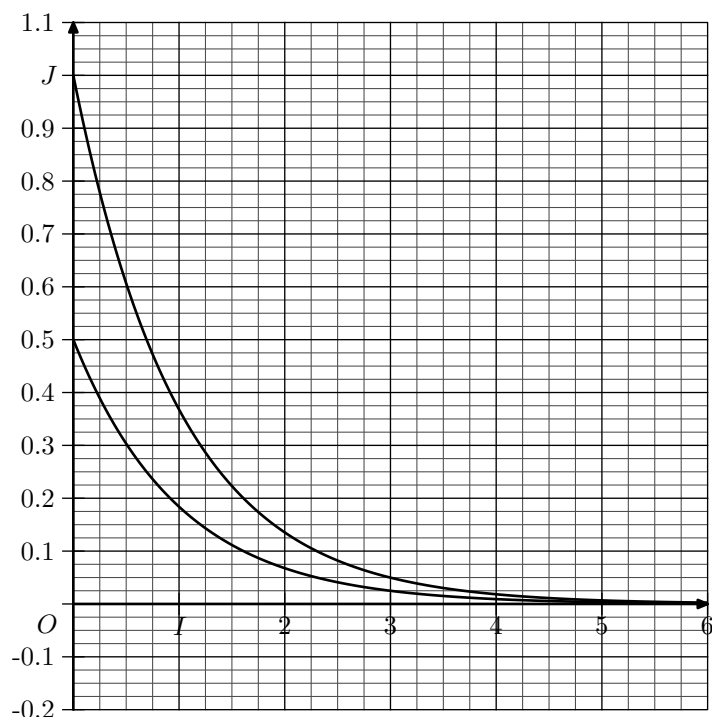
$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Partie A

- 1 Étudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
- 2 Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul : $e^{-x} \leq e^x$.
- 3 a Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
- 4 On considère les fonctions g et h définies sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{e^x}$; $h(x) = \frac{1}{2 \cdot e^x}$

Ci-dessous sont tracés, dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les courbes représentatives de g et h , notées respectivement Γ_1 et Γ_2 .



- a Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul : $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$
- b Que peut-on en déduire pour les courbes Γ , Γ_1 et Γ_2 ? Tracer Γ dans le graphique ci-dessus, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$

- 1 Justifier l'existence de (I_n) , et donner une interprétation géométrique de (I_n) .
- 2 a Démontrer, que pour tout entier naturel n : $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$
b En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

- c Démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie C

Soit (J_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $J_n = \int_0^n f(x) dx$

- 1 En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A 4 a, démontrer que, pour tout entier naturel n : $\frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-n}) \leq J_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1$
- 2 Démontrer que la suite (J_n) est croissante. En déduire qu'elle converge.
- 3 On note L la limite de la suite (J_n) et on admet le théorème suivant :

“Si u_n , v_n et w_n sont trois suites convergentes de limites respectives a , b et c et si, à partir d'un certain rang, on a pour tout n , $u_n \leq v_n \leq w_n$ alors $a \leq b \leq c$ ”.

Donner un encadrement de L .

- 4 Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

On note v la primitive de u sur $\mathbb{R}$ telle que : $v(1) = \frac{\pi}{4}$.
On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \frac{\pi}{2}$.

- a Démontrer que, pour tout réel x : $f(x) = \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}$.
- b Démontrer que, pour tout réel x , f est la dérivée de la fonction $x \mapsto v(e^x)$.
- c En déduire la valeur exacte de L .

E.21 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 2 \end{cases} ; \quad v_n = u_n - \ln n \text{ pour } n \geq 1.$$

- 1 a Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
b Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
- 2 a Montrer que, pour tout entier naturel k non nul : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$
b En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes : $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$; $0 \leq v_n \leq 1$
- 3 a Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$
b En déduire le sens de variations de la suite (v_n) .
- 4 Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ).
Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

9. Calculs d'intégrales, aires et volumes

E.22 On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, (unité graphique : 5 cm).

Partie A. Étude de la fonction f

- 1 Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
- 2
 - a Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
 - b Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x . En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
 - c Dresser le tableau des variations de f .
- 3 Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie B. Quelques propriétés graphiques.

- 1 On considère les points M et M' de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées du milieu A du segment $[MM']$.
Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}$?

- 2 Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y=1$, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$, $\mathcal{A}_n$ désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.

- a Calculer $\mathcal{A}_n$.
- b Étudier la limite éventuelle de $\mathcal{A}_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Calcul d'un volume.

Soit λ un réel positif. On note $\mathcal{V}(\lambda)$ l'intégrale :

$$\mathcal{V}(\lambda) = \int_{-\lambda}^0 \pi [f(x)]^2 dx$$

On admet que $\mathcal{V}(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe $\mathcal{C}$ obtenue pour $-\lambda \leq x \leq 0$.

- 1 Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel x :
$$\frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^x}{e^x + 1} + \frac{be^x}{(e^x + 1)^2}$$
- 2 Exprimer $\mathcal{V}(\lambda)$ en fonction de λ .
- 3 Déterminer la limite de $\mathcal{V}(\lambda)$ lorsque λ vers $+\infty$.

10. Modélisation

E.23 Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$v_1(t) = 5 \times \frac{e^{0,3 \cdot t} - 1}{e^{0,3 \cdot t} + 1}$$

- 1 Déterminer le sens de variation de la fonction v_1 .
- 2 On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en $m \cdot s^{-1}$) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.

On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si la vitesse à l'arrivée n'excède pas $6 m \cdot s^{-1}$.

Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement? Justifier.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.

On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en $m \cdot s^{-1}$), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$v_2(t) = 32,7 \cdot (1 - e^{-0,3 \cdot t})$$

- 1 Quelle est la vitesse, exprimée en $m \cdot s^{-1}$, atteinte par le colis au bout de 10 secondes? Arrondir à $0,1 m \cdot s^{-1}$.

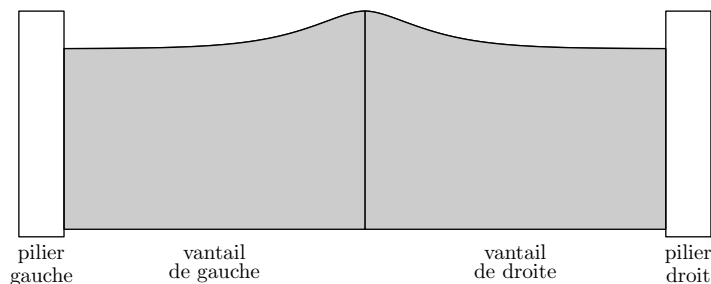
- 2 Résoudre l'équation $v_2(t) = 30 m \cdot s^{-1}$. Donner une interprétation concrète de la solution de cette équation dans le cadre de cet exercice.

- 3 On sait que la chute du colis dure 20 secondes.
On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$d(T) = \int_0^T v_2(t) dt$$

- a Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle $[0; 20]$:
$$d(T) = 109 \cdot (e^{-0,3 \cdot T} + 0,3 \cdot T - 1)$$
- b Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.
- 4 Déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.

E.24 On désire réaliser un portail comme indiqué ci-dessous. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.



Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-4x} + b$$

où b est un nombre réel. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.

- 1 a Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 2]$.
- b En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.
- 2 Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à $1,5\text{ m}$.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-4x} + \frac{5}{4}$$

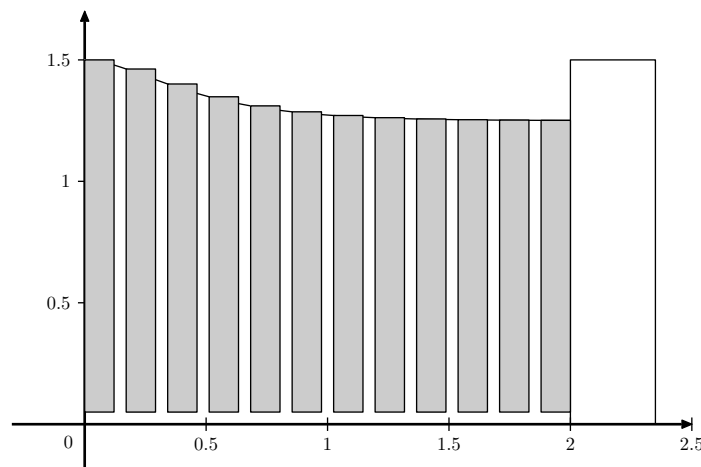
Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à $0,05\text{ m}$ de hauteur du sol.

- 1 Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :
$$F(x) = \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right) \cdot e^{-4x} + \frac{5}{4} \cdot x$$
est une primitive de la fonction f .
- 2 En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet "vantail" sans faire référence à son environnement).

Partie C : utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme, mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur $0,12\text{ m}$, espacées de $0,05\text{ m}$. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail et le bas de chaque planche à $0,05\text{ m}$ de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.



La distance entre le bas du portail et le sol est de $0,05\text{ m}$

- 1 Donner l'aire de la planche de numéro k .
- 2 Recopier et compléter l'algorithme, ci-dessous, afin qu'en fin d'exécution, la valeur de la variable S corresponde à la somme des aires des planches du vantail de droite.

```

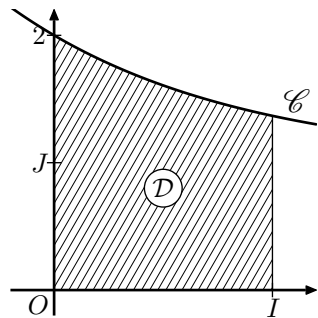
S ← 0
X ← 0
Tant que X+0;17 < ...
    S ← S+...
    X ← X+0;17
Fin Tant que
    
```


E.25 On considère la fonction g définie par :
 $g(x) = 1 + e^{-x}$ pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$.

On admet que :

$$g(x) > 0, \quad \text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } [0; 1].$$

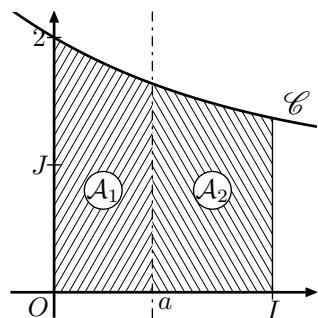
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé, et $\mathcal{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$, d'autre part entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. La courbe $\mathcal{C}$ et le domaine $\mathcal{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (*partie A*), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (*partie B*).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leq a \leq 1$. On note $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe (Ox) , les droites d'équations $x=0$ et $x=a$, puis $\mathcal{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x=a$ et $x=1$. $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



- 1 a Démontrer que : $\mathcal{A}_1 = a - e^{-a} + 1$.
- b Exprimer $\mathcal{A}_2$ en fonction de a .
- 2 Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2 \cdot e^{-x} + \frac{1}{e}$$
 - a Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.
 - b Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0; 1]$ en un réel α . Donner la valeur de α arrondie au centième.
- 3 En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.

Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y=b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

- 1 Justifier l'inégalité $b < 1 + \frac{1}{e}$. On pourra utiliser un argument graphique.
- 2 Déterminer la valeur exacte du réel b .

E.26 Les parties A et B sont indépendantes

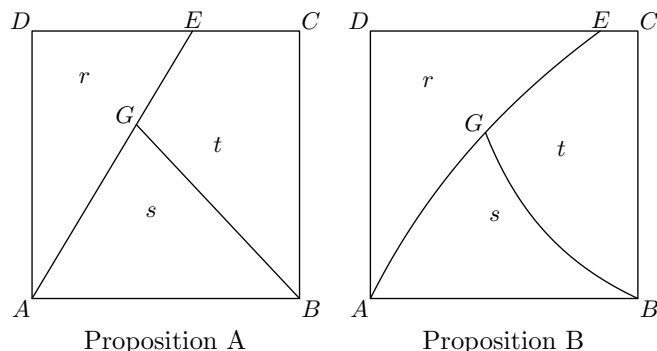
Le fabricant de cadenas de la marque "K" désire imprimer un logo pour son entreprise.

Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré $ABCD$, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C_1 et C_2 suivantes :

- **Condition C_1 :** la lettre K doit être constituée de trois lignes :
 - ➡ une des lignes est le segment $[AD]$;
 - ➡ une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment $[DC]$;
 - ➡ la troisième ligne a pour extrémités le point B et le point G situé sur la deuxième ligne.
- **Condition C_2 :** l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre 0,3 et 0,4, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées r, s, t sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.



Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales :

$$r = s = t = \frac{1}{3}$$

Déterminer les coordonnées des points E et G .

Partie B : étude de la proposition B

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :

- la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel $x \geq 0$ par : $f(x) = \ln(2x+1)$;
- la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$g(x) = k \left(\frac{1-x}{x} \right)$$
 où k est un réel positif qui sera déterminé.

- 1 a Déterminer l'abscisse du point E .
- b Déterminer la valeur du réel k , sachant que l'abscisse du point G est égale à 0,5.
- 2 a Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel $x \geq 0$ par :

$$F(x) = (x + 0,5) \cdot \ln(2 \cdot x + 1) - x$$

(b) Démontrer que : $r = \frac{e}{2} - 1$

(3) Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

(4) On admet que les résultats précédents permettent d'établir que :

$$s = [\ln(2)]^2 + \frac{\ln(2) - 1}{2}$$

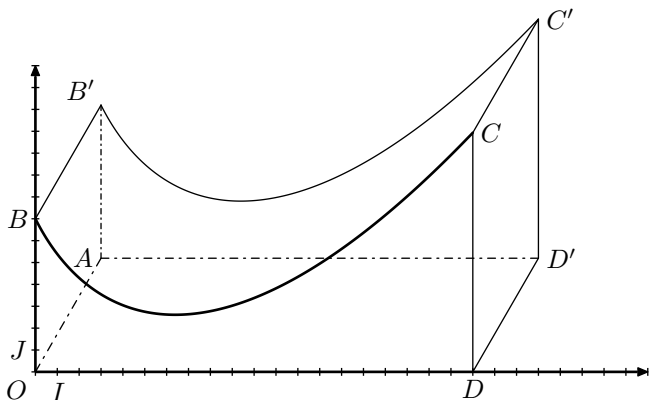
La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?

E.27 Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.

Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères $OAD'D$, $DD'C'C$ et $OAB'B$ sont des rectangles.

Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, $DD' = 10$, sa longueur OD est de 20 mètres.

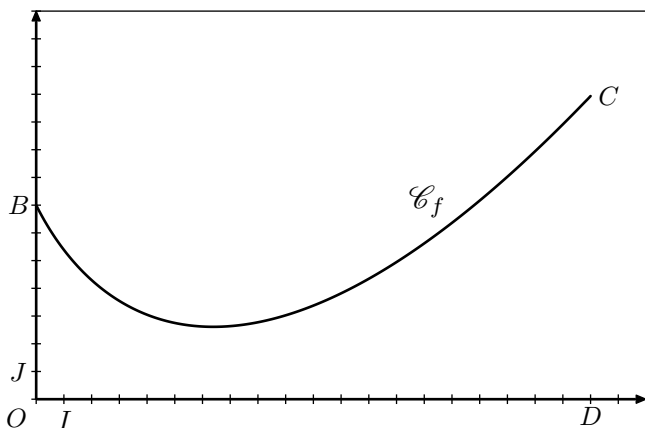


Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par :

$$f(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1) - 3x + 7$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O; I; J)$.



Partie 1

(1) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 20]$, on a :

$$f'(x) = \ln(x+1) - 2$$

(2) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0; 20]$ et dresser son tableau de variation.

(3) Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe

$\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée inclinaison du module de skateboard au point B .

(4) On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+1)^2 \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par : $g'(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1)$.

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$.

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

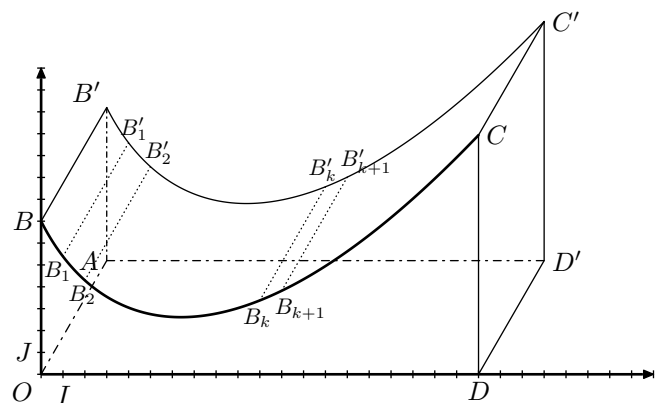
(1) Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

- P_1 : la différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.
- P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C .

(2) On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre. Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

(3) On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère $(O; I; J)$ du plan de face, les points $B_k(k; f(k))$ pour k variant de 0 à 20. Ainsi : $B_0 = B$.



On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathcal{C}$ allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_k B_{k+1}]$.

Ainsi, l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k$ (voir figure).

(a) Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19 :

$$B_k B_{k+1} = \sqrt{1 + [f(k+1) - f(k)]^2}$$

(b) Compléter l'algorithme afin qu'on puisse récupérer dans les valeurs de ses variables une estimation de l'aire de la partie roulante.

```

Fonction f(x)
  Renvoyer (x+1) ln(x+1) - 3x+7
S ← 0
Pour K variant de ... à ...
  S ← ...
Fin Pour

```

Quelle est la variable qui contiendra une estimation de l'aire de la partie roulante?

E.28 Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (*pixels*) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de façon suivante :

- $x=0$ pour le blanc ;
- $x=1$ pour le noir ;
- $x=0,01$; $x=0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x=0,99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (*du clair au foncé*).

L'image A , ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites "*fonctions de retouche*".

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ est dite "*fonction de retouche*" si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0)=0$;
- $f(1)=1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

- si $f(x)=x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0,2^2=0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
- Si $f(x)=\sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

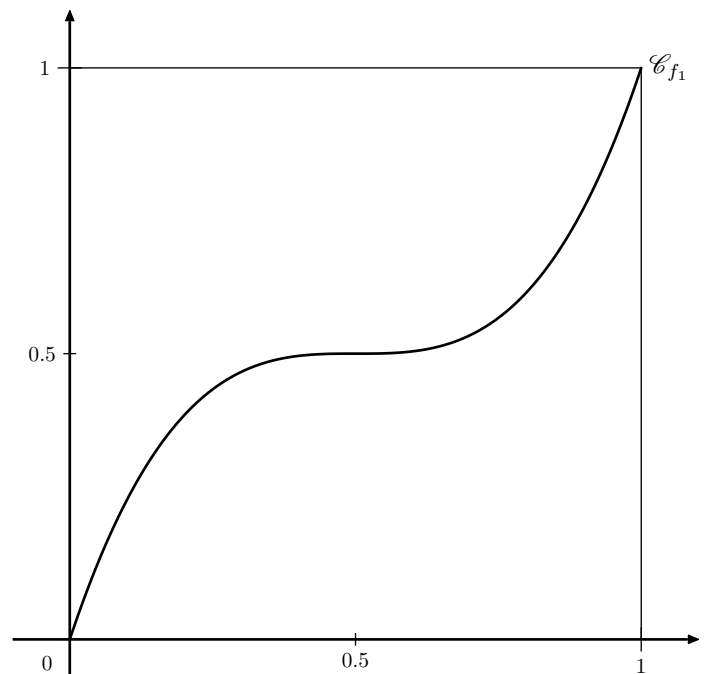
Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

- On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$
 - Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.
 - Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$, à l'aide du graphique donné ci-dessous, en faisant apparaître les pointillés utiles.



Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

- On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $f_2(x) = \ln[1 + (e-1) \cdot x]$
On admet que f_2 est une fonction de retouche.
On définit sur l'intervalle $[0; 1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.
 - Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$: $g'(x) = \frac{(e-2) - (e-1) \cdot x}{1 + (e-1) \cdot x}$
 - Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.
 - Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0; 1]$ deux solutions α et β , avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$; $0,85 < \beta < 0,86$

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

- Dans l'algorithme décrit ci-dessous, la fonction g prend pour arguments les variables x (*nuance initiale*), y (*nuance retouchée*), E (*écart*) et utilise la fonction f qui désigne une fonction de retouche.

Dans le code de la fonction g , la variable c sert de compteur.

```

Fonction g(x,y,E)
  c ← 0
  Pour k allant de 0 à 100
    x ←  $\frac{k}{100}$ 
    y ← f(x)
    E ← |y - x|
    Si E ≥ 0,05
      Alors c ← c+1
  Fin si
Fin pour
Renvoyer c

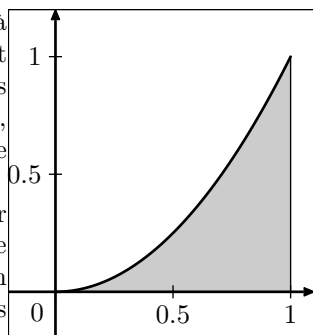
```

Lors de l'appel à la fonction g , cet algorithme renvoie la valeur de la variable c . Quel est le rôle de cet algorithme?

- 2 Quelle valeur sera renvoyée par la fonction g si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la partie A?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) \leq x$. On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathcal{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.



Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image et celle qui correspond à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouches :

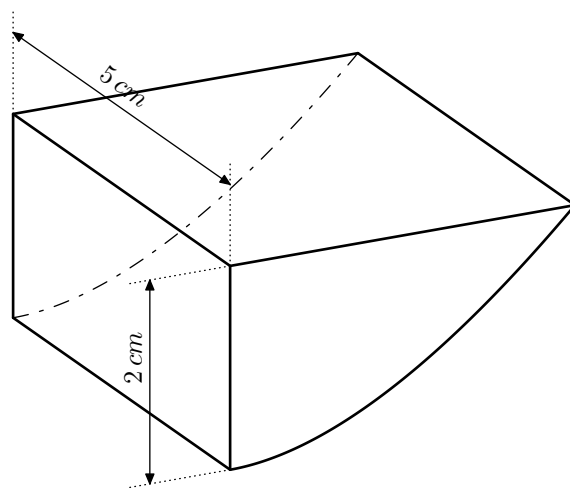
$$f_3(x) = x \cdot e^{(x^2-1)} \quad ; \quad f_4(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}$$

- 1 a Calculer $\mathcal{A}_{f_3}$.
 b Calculer $\mathcal{A}_{f_4}$.
 2 De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image?

E.29 Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.

Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.



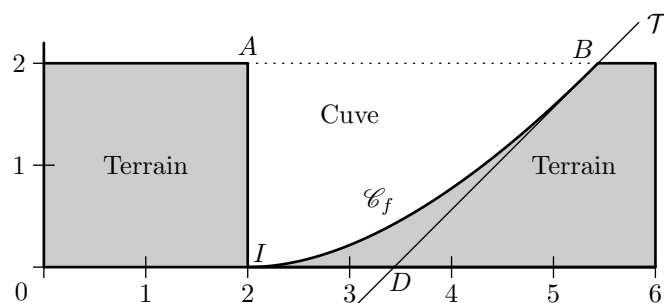
Cette cuve est schématisée ci-contre.

La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2; 2e]$ définie par :

$$f(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 m et constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points $A(2; 2)$, $I(2; 0)$ et $B(2e; 2)$.



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

- 1 Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point I .
 2 On note $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B , et D le point d'intersection de la droite $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses.
 a Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$ et en déduire les coordonnées de D .
 b On appelle $\mathcal{S}$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites d'équations $y=2$, $x=2$ et $x=2e$. $\mathcal{S}$ peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze $AIDB$. Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire?
 3 a Montrer que, sur l'intervalle $[2; 2e]$, la fonction G

définie par :

$$G(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

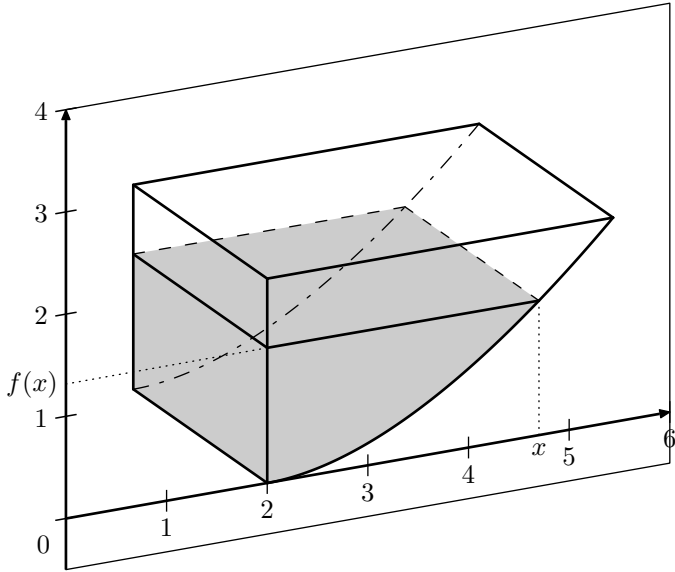
est une primitive de la fonction g définie par :

$$g(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

- (b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2; 2e]$.
- (c) Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{S}$ et en déduire une valeur approchée du volume $\mathcal{V}$ de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3 , se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.



On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2; 2e]$.

$$v(x) = 5 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3 \right]$$

- ① Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est d'un mètre?
- ② On rappelle que $\mathcal{V}$ est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre et on s'intéresse à la valeur de la variable d en fin d'exécution de celui-ci. Interpréter le résultat que cet algorithme affecte, en fin d'exécution, à la variable d

```
a ← 2
b ← 2e
Tant que v(b) - v(a) > 10-3
    c ← (a+b)/2
    Si v(c) < V/2
        Alors a ← c
        Sinon b ← c
    Fin Si
Fin tant que
d ← f(c)
```