Terminale Spécialité / Annales sur les suites

1. Etudes de suites

E.1 Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 2 \cdot n^2 - n$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = u_n + 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 5$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules `C2` et `B3` et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et u_n en fonction de n uniquement.

E.2 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2 \cdot n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On considère les deux fonctions ci-dessous, extrait d'algorithmes, prenant pour argument un entier `n` :

Algorithme 1

```
Fonction f(n)
  u ← 0
  Pour i allant de 1 à n
    u ←  u+2·i+2
  Fin pour
  Renvoyer u
```

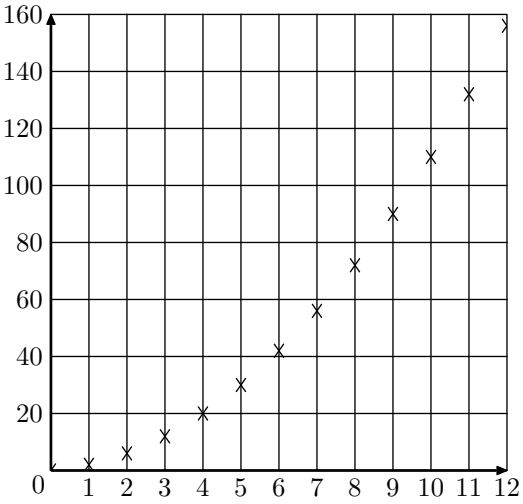
Algorithme 2

```
Fonction f(n)
  u ← 0
  Pour i allant de 0 à  n−1
    u ←  u+2·i+2
  Fin pour
  Renvoyer u
```

De ces deux fonctions, laquelle renvoie la valeur du terme u_n de rang `n`, la valeur fourni en argument lors de l'appel à la fonction ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n : $u_n = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. On définit, pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$S_n = (n+1)(n+2)$$

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

CC BY-NC

$S_n = u_{n+1} - u_0$,
puis exprimer u_n en fonction de n.

E.3

1. On considère la fonction `f`, donnée ci-dessous et issue d'un algorithme, prenant les arguments `a`, `b`, `N` de valeurs entières non-nul :

```
Fonction f(a,b,N)
    u ← a
    v ← b
    n ← 0
    Tant que  n<N
        n ← n+1
        u ← (a+b)/2
        v ← √((a²+b²)/2)
        a ← u
        b ← v.
    Fin Tant que
    Renvoyer (u;v)
```

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant y indiquant les valeurs prises par les variables de la fonction f lors d'une exécution pas à pas et lorsque l'appel est effectué avec les valeurs `a`$=4$, `b`$=9$ et `N`$=2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0<a<b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0=a$, $v_0=b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n > 0 \quad ; \quad v_n > 0$

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$$
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n \leqslant v_n$.

3. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

E.4 On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}\cdot u_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}\cdot u_n$

   a. Calculer v_0.

   b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

   c. En déduire que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

   a. Calculer w_0.

   b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}\cdot u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

   c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_{n+1} = w_n + 2$.

   d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$u_n = \frac{2\cdot n - 1}{2^n}$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

E.5 La suite (u_n) est définie par :
$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. a. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$: $u_n \geqslant 0$.

   b. En déduire que pour tout $n \geqslant 4$: $u_n \geqslant n-2$.

   c. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On définit la suite (v_n) par : $v_n = 4u_n - 8n + 24$

   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$u_n = 7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6.$$

   c. Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

   d. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

 CC BY-NC

2. *Suites, variations et limites*

E.6 **Partie A**

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation :

$$u_{n+1} = a \cdot u_n + b \quad \textit{(a et b réels non nuls tels que } a \neq 1\textit{)}$$

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant $80\,cm$. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de $30\,cm$ au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille?
2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015+n)$.
   a. Justifier que, pour tout entier naturel n :
   $h_{n+1} = 0{,}75 \cdot h_n + 30$
   b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variation de la suite (h_n). Démontrer cette conjecture *(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence)*.
   c. La suite (h_n) est-elle convergente? Justifier la réponse.

E.7 Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n>0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.
On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$
- pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$
- pour tout $n>0$: $u_0+u_1+\cdots+u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.
2. Pour tout entier $n>0$, on note :
   $s_n = u_0+u_1+\cdots+u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.
   On a en particulier $s_1 = u_0$.
   a. Vérifier que pour tout entier $n>0$:
   $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$
   b. En déduire que pour tout entier $n>0$: $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$
   c. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$: $u_n > 1$.
3. On souhaite que la fonction f ci-dessous renvoie la valeur d'un des termes de la suite (u_n) où les arguments `u` et `n` de la fonction sont respectivement le premier terme de la suite (u_n) et le rang du terme souhaité.

```
Fonction f(u,n)
    s ← u
    Pour i allant de 1 à n
       u ← ...
       s ← ...
    Fin pour
    Renvoyer u
```

   a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-dessus.
   b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

   Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n)?
4. a. Justifier que pour tout entier naturel $n>0$: $s_n > n$.
   b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

 CC BY-NC

E.8 L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(x + \frac{7}{x}\right) \qquad (*)$$

Démontrer que la fonction f admet un minimum.
En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant \sqrt{7}$

2. a. Soit n un entier naturel quelconque. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

   b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

   c. On déduit de la relation $(*)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que : $\ell = \frac{1}{2}\cdot\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right)$.
   Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$$

4. On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad ; \quad d_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot {d_n}^2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
   $u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n$

   b. Voici une fonction issue d'un algorithme prenant pour argument `p` qui est un entier naturel.

```
Fonction f(p)
    d ← 1
    n ← 0
    Tant que   d>10^-p
        d ← 0,5·d²
        n ←  n+1
    Fin Tant que
    Renvoyer n
```

   En appelant la fonction avec la valeur 9, la valeur renvoyée est le nombre 5.
   Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
   Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

3. *Suites et logarithmes*

E.9 **Partie A**

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$

2. a. Établir que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$$

   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1+0{,}5u_n}{0{,}5+u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

```
u ← 2
Pour i allant de 1 à n
    u ← (1+0,5u)/(0,5+u)
Fin Pour
```

   Reproduire et compléter le tableau ci-dessous indiquant les valeurs prises par les variables `i` et `u` lors de l'exécution pas à pas de cet algorithme. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour n=12, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	0,99997	1,00001	0,999996	1,000001

   Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

   b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$$

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

 CC BY-NC

E.10 On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de $10\,m\ell$ de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi, $u_0 = 10$.
   a. Quelle est la nature de la suite (u_n)?
   b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.
   c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale? Justifier la réponse.
2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de $10\,m\ell$ de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en dessous de $5\,m\ell$, la machine réinjecte $4\,m\ell$ de produit.

   Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

   Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang à la minute n.

   L'algorithme suivant permet, au travers des valeurs prises par la variable v, d'obtenir la quantité restante de médicament minute par minute.

```
v ← 10
Pour n allant de 1 à 15
     v ← 0,8× v
     Si  v<5
         Alors v ←  v+4
     Fin Si
Fin Pour
```

   a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	10	8	6,4					8,15

n	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

   b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme?
   c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte $2\,m\ell$ de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à $6\,m\ell$ et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

   Recopier l'algorithme précédent en le modifiant afin, qu'en fin d'exécution, la valeur de la variable b soit la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.
3. On programme la machine de façon que :
   - à l'instant 0, elle injecte $10\,m\ell$ de médicament,
   - toutes les minutes, elle injecte $1\,m\ell$ de médicament.

   On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

   Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en $m\ell$, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

   a. Justifier que pour tout entier naturel n :
   $w_{n+1} = 0{,}8 \cdot w_n + 1$.
   b. Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = w_n - 5$.
   Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
   d. Quelle est la limite de la suite (w_n)? Quelle interprétation peut-on en donner?

E.11
1. Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$
   a. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.
   b. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par :
   $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.
   c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = w_n$.
2. Soit v la suite de terme général v_n défini par :
   $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$
   où ln désigne la fonction logarithme népérien :
   a. Montrer que : $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$
   b. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$
   Exprimer S_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. *Suites et intégrations*

E.12 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} \quad \text{pour } n \geqslant 2 \end{cases} \quad ; \quad v_n = u_n - \ln n \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

1. a. Calculer u_2, u_3 et u_4.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul :
   $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$

 CC BY-NC

(b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant u_n - \frac{1}{n} \quad ; \quad 0 \leqslant v_n \leqslant 1$$

(3) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

(b) En déduire le sens de variations de la suite (v_n).

(4) Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) *(on ne cherchera pas à calculer γ)*. Quelle est la limite de la suite (u_n)?

E.13

(1) Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1$$

(a) Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.

(b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$.

(2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

(a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\,;1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\,;0)$.

(b) Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

(c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

(d) Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

(3) (a) Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et α_n.

(b) Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que :

$$f_{n+1}(\alpha_n) < 0$$

(c) Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

(d) Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Établir que $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

(4) On désigne par $\mathscr{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = \mathrm{e}$.

(a) Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\dfrac{\alpha_n^2}{n}$.

(b) Établir que : $(\mathrm{e} - \alpha_n)\ln\alpha_n \leqslant \dfrac{\alpha_n^2}{n} \leqslant (\mathrm{e} - \alpha_n)$

(c) En déduire un encadrement de $n(\mathrm{e} - \alpha_n)$.

(d) la suite de terme général $n(\mathrm{e} - \alpha_n)$ est-elle convergente? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n)?

5. *Exercices non-classés*

E.14 Polynésie Juin 2018

CC BY-NC