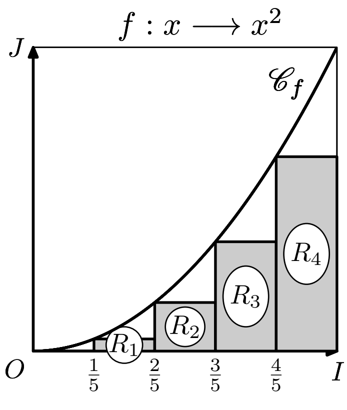
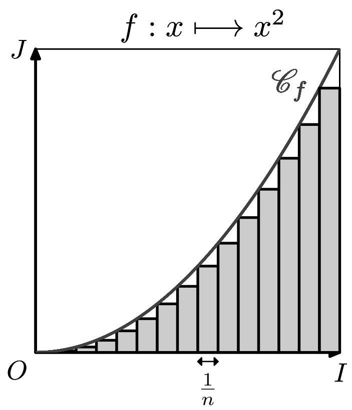
Terminale Spécialité / Calcul intégral

1. Introduction

E.1 On considère la fonction carrée, notée f et sa courbe $\mathscr{C}_f$ représentative dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

On construit des rectangles pour "*remplir*" l'aire située entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.





Les deux représentations ci-dessous partagent l'intervalle $[0\,;1]$ en n parties égales formant des rectangles de même largeur :

- pour la figure de gauche $n=5$;
- la figure de droite représente une figure quelconque.

Partie A : $n=5$

On note $\mathcal{A}_5$ l'aire grisée située sous la courbe.

1. Justifier l'égalité : $\mathcal{A}_5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{k}{5}\right)^2$

2. Établir l'égalité : $\mathcal{A}_5 = \dfrac{6}{25}$

Partie B : dans le cas général

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\mathcal{A}_n$ l'aire hachurée sous la courbe $\mathscr{C}_f$ lorsque le segment $[0\,;1]$ est divisé en n parties égales. On admet que cette aire a pour valeur :

$$\mathcal{A}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n tel que $n\geqslant 2$:
$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$$

2. En déduire l'égalité suivante : $\mathcal{A}_n = \dfrac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6\cdot n^3}$

3. a. Déterminer la valeur de la limite :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}$$

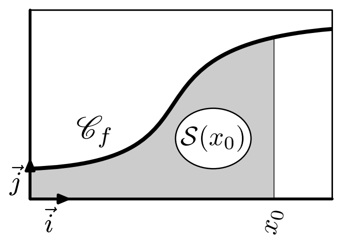
   b. En déduire la mesure de l'aire comprise :
   - verticalement : entre les deux droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
   - horizontalement : entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y=0$.

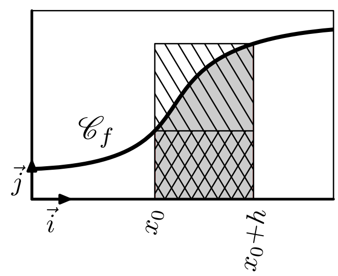
E.2 Soit f une fonction continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Pour $a\in\mathbb{R}_+$, on note $\mathcal{S}(a)$ l'aire comprise :

- verticalement : entre les droites d'équations : $x=0$ et $x=a$;
- horizontalement : entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y=0$.

La figure de gauche présente l'image de x_0 par la fonction $\mathcal{S}$:





On souhaite déterminer la fonction dérivée de la fonction $\mathcal{S}$. Pour cela, on considère le nombre réel h où $h>0$ et la figure de droite ci-dessus.

1. Cette représentation met en évidence les trois aires suivantes :

   $\mathcal{A}_1$ $\mathcal{A}_2$ $\mathcal{A}_3$

   Laquelle de ces aires représente l'aire définie par :
   $\mathcal{S}(x_0+h)-\mathcal{S}(x_0)$

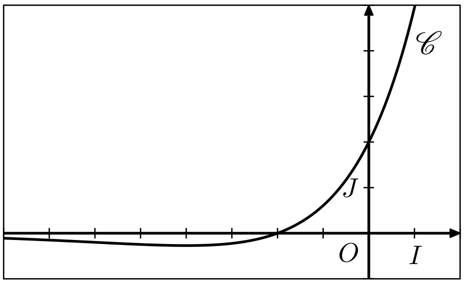
2. a. Comparer les trois aires $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$.

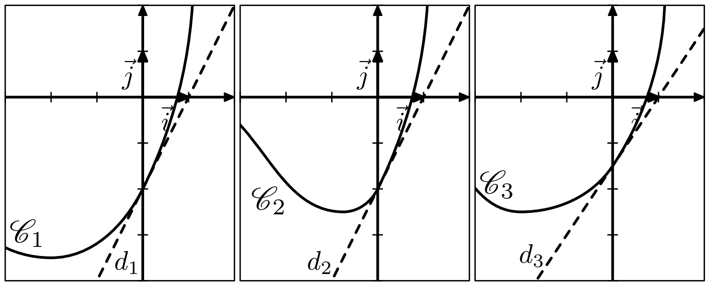
   b. Donner un encadrement de la différence ci-dessous, à l'aide de la fonction f, de x_0 et de h :
   $\mathcal{S}(x_0+h)-\mathcal{S}(x_0)$

3. En déduire la limite suivante :
$$\lim_{h\mapsto 0^+} \frac{\mathcal{S}(x_0+h)-\mathcal{S}(x_0)}{h} = f(x_0)$$

E.3 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ et trois autres courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2. On désigne par F une fonction vérifiant la condition suivante :
$$F' = f \qquad (i.e.\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ F'(x) = f(x)).$$
   a. À l'aide de la courbe $\mathscr{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
   b. L'une des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F.
   Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

2. Premières manipulations des primitives

E.4 Soit f une fonction strictement positive sur l'intervalle $[a\,;b]$. On considère la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par la relation :
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction F sur l'intervalle $[a\,;b]$.

2. Justifier l'existence d'un unique réel x_0 vérifiant :
$$F(x_0) = \frac{1}{2}\cdot F(b)$$

E.5 On considère la fonction carrée, notée f et sa courbe $\mathscr{C}_f$ représentative dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

On construit des rectangles pour "*remplir*" l'aire située entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.

Figure 1

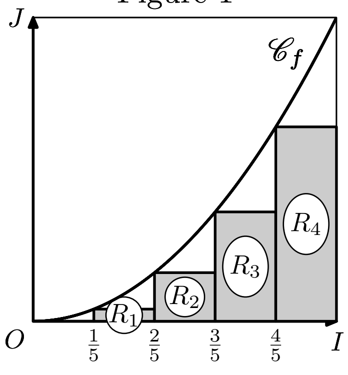
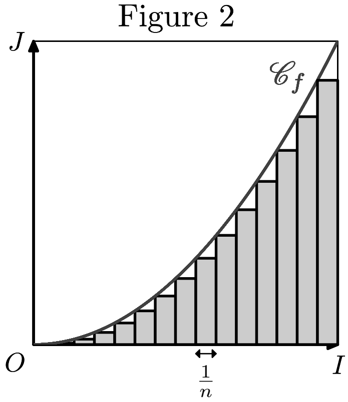


Figure 2



Les deux représentations ci-dessous partagent l'intervalle $[0\,;1]$ en n parties égales formant des rectangles de même largeur :

- pour la figure de gauche $n=5$;
- la figure de droite représente une figure quelconque.

Partie A : $n=5$

Dans la figure 1, on note $\mathcal{A}_5$ l'aire de la partie grisée.

1. Justifier l'égalité : $\mathcal{A}_5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{k}{5}\right)^2$

2. Établir l'égalité : $\mathcal{A}_5 = \dfrac{6}{25}$

Partie B : avec OpenCal

1. a. Dans une nouvelle feuille de calcul, saisir les valeurs suivantes :

	A	B	C	D	E	F	G
1	n=	6					
2							
3	0	1	2	3	4	5	
4							
5							
6	A=						

   b. Saisir dans la cellule `A4` la formule :
   `=1/$B$1*(A3/$B$1)^2`
   Étendre cette formule sur la plage `A4:F4`.
   c. Écrire une formule dans la cellule `B6` donnant la somme des valeurs présentes dans la ligne `4`.
   d. Justifier que cette valeur est la valeur approchée de $\mathcal{A}_6$.

2. Modifier votre feuille de calcul pour calculer $\mathcal{A}_7$.

3. De même pour obtenir une valeur approchée de $\mathcal{A}_{50}$.

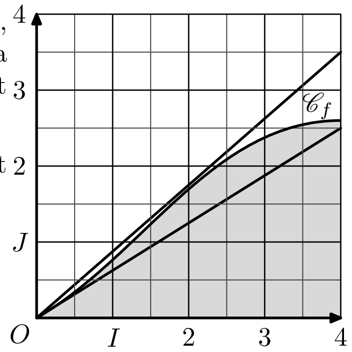
3. *Calcul d'aires*

E.6

On considère la fonction f, définie sur $[0\,;4]$, dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :

Déterminer un encadrement de l'intégrale :

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$$

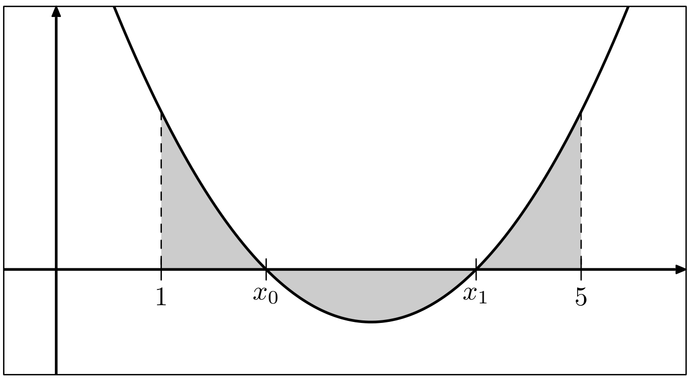


E.7 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot x^2 - 3x + 4$$

1. Déterminer la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



On souhaite déterminer la valeur de l'aire de la partie présentée en gris.

a. Déterminer les zéros de la fonction f qu'on notera x_0 et x_1 tels que $x_0 < x_1$.

b. Déterminer la valeur de : $\displaystyle\int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

c. Déterminer la valeur de : $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x$

d. En déduire l'aire, en unité d'aire, de la partie grisée.

E.8 Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0\,;1]$.

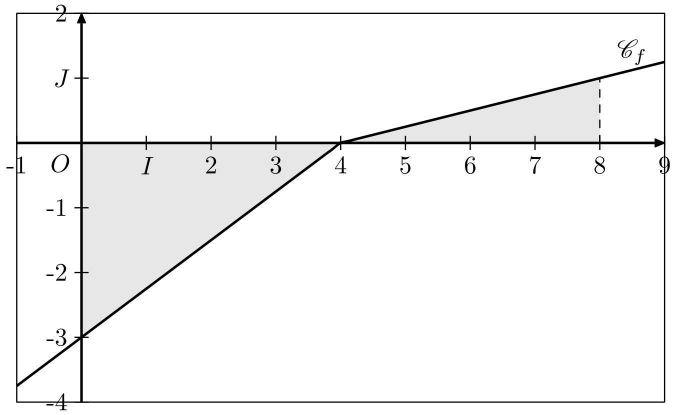
Dire si la proposition suivante est exacte ou non. Justifier votre réponse.

Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ alors $f = g$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

E.9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2 - \frac{1}{4}\cdot|x-4|$$

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



On souhaite déterminer l'aire de la partie hachurée.

1. Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des intervalles $[0\,;4]$ et $[4\,;8]$.

2. Déterminer l'aire de la surface grisée.

4. *Calcul d'integrales*

E.10 Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-3}^2 x + 1\,\mathrm{d}x$

b. $\displaystyle\int_0^5 (2x-5)^2\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle\int_{-3}^1 (1-x)^3\,\mathrm{d}x$

d. $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{(2\cdot x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

e. $\displaystyle\int_4^6 \frac{2\cdot x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x$

f. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

E.11 On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2\cdot\mathrm{e}^{-x}$$

1. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$H(x) = -(x^2 + 2\cdot x)\cdot\mathrm{e}^{-x}$
Calculer la dérivée H' de la fonction H.

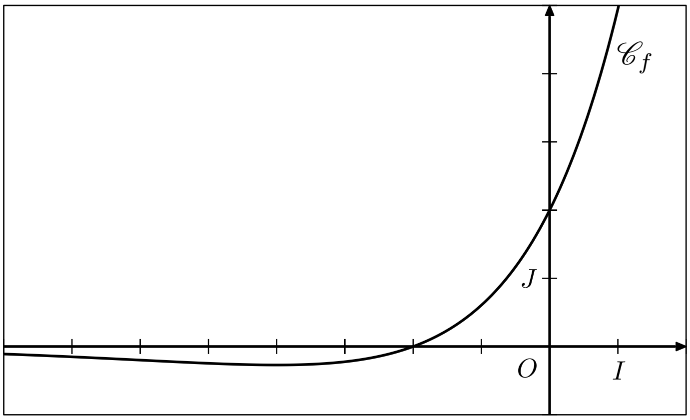
2. En déduire une primitive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de la fonction g.

3. En déduire la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$

E.12 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.



On pose : $\quad I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Interpréter géométriquement le réel I.
2. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$$
Vérifier que : $\quad f = 2\cdot\big(u'\cdot v + u\cdot v'\big)$.
3. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

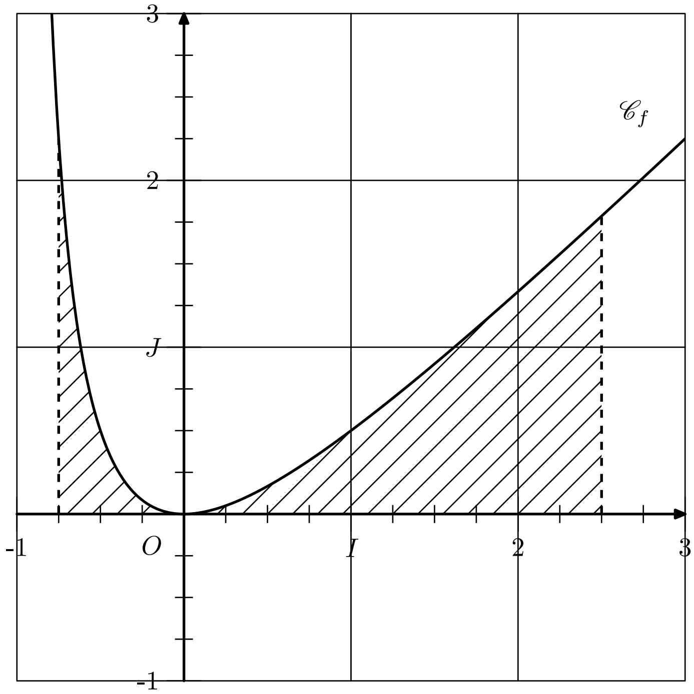
E.13 Soit n un entier naturel non-nul, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{4\cdot e^{n\cdot x}}{e^{n\cdot x}+7}$$

1. Pour n un entier naturel non-nul, déterminer une primitive de la fonction f_n.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :
$$u_n = \frac{n}{\ln 7}\cdot\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
Montrer que la suite (u_n) est constante.

E.14

1. Soit f la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]-1\,;+\infty[$ par la relation :
$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$
La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère $(O\,;I\,;J)$, on a :



   a. Déterminer la valeur des nombres réels a, b et c vérifiant l'égalité suivante pour tout $x \in \mathcal{D}$:
   $$f(x) = a\cdot x + b + \frac{c}{x+1}$$
   b. Déterminer l'expression d'une primitive de la fonction f.
   c. Calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations :
   $$x = -\frac{3}{4} \quad ; \quad x = \frac{5}{2} \quad ; \quad y = 0$$
   d. Sachant que cette représentation est réalisée avec l'échelle : 1 unité $=$ 1,5 cm
   Donner l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 arrondi à l'unité.
2. Calculer les intégrales suivantes :
   a. $\displaystyle\int_{-1}^{3} x\cdot e^{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ b. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\cdot e^{x^2}}{\left(e^{x^2}+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$

5. Linéarité de l'intégrale

E.15 On considère les deux intégrales suivantes :

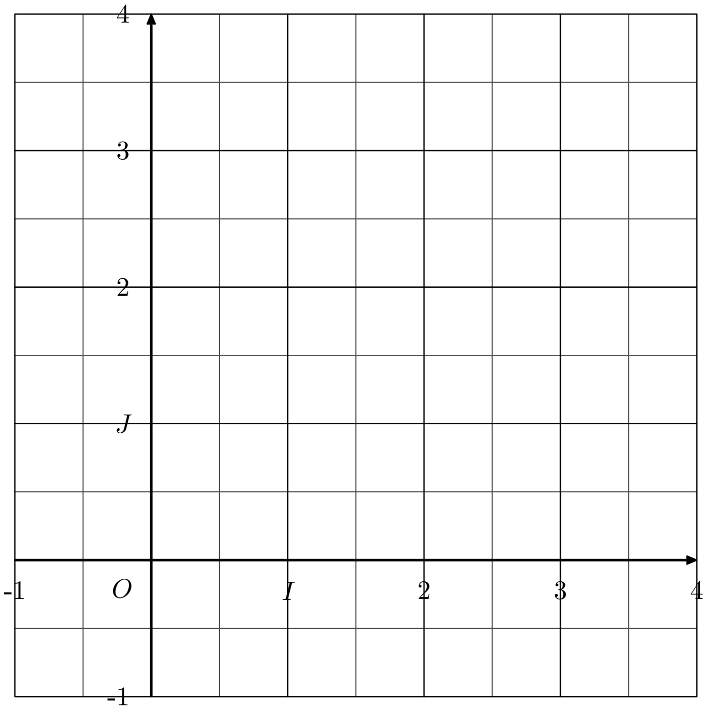
$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$$

1. Justifier l'égalité : $\quad I + J = 1$.
2. a. Déterminer la valeur de l'intégrale I.
   b. En déduire la valeur de l'intégrale J.

6. Relation de Chasles

E.16 On considère la fonction partie entière E qui renvoie à tout nombre réel sa partie entière.

1. Dans le repère ci-dessous, représenter la courbe représentative de la fonction E sur l'intervalle $[-1\,;4]$.



(2) Déterminer la mesure de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^4 E(x)\,\mathrm{d}x$

7. *Positivité de l'intégrale*

E.17 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et admettant le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		e		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln 5$	$\searrow$	0

Déterminer, si possible, le signe des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_3^e f(x)\,\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} f(x)\,\mathrm{d}x$

E.18 Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;1]$ par la relation :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x}$$

On définit la suite (u_n) de nombres réels par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

(1) Établir, pour tout entier naturel n, la comparaison :
$$u_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$

(2) En déduire que la suite (u_n) est convergente et converge vers 0.

E.19 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par la relation :

$$f(x) = x^n\cdot\sqrt{x} \quad \text{pour } x\in[0\,;1].$$

On considère la suite (u_n) définie, pour $n\in\mathbb{N}$, par :

$$u_n = \int_0^1 x^n\cdot\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

(1) Justifier que tous les termes de la suite sont positifs.

(2) En étudiant le signe de la fonction :
$$x \longmapsto x^{n+1}\cdot\sqrt{x} - x^n\cdot\sqrt{x},$$
Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

8. *Positivité de l'intégrale et bornes variables*

E.20 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par la relation :

$$u_n = \int_0^n x\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Justifier que la suite (u_n) est croissante.

E.21 Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ telle que : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n=\int_0^n f(x)\,dx$$

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

$$e^x-x\geqslant\frac{e^x}{2}$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$I_n\leqslant\int_0^n 2{\cdot}x{\cdot}e^{-x}\,dx$$

b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ telle que : $H(x)=(-x-1){\cdot}e^{-x}$.
Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $I_n\leqslant 2$.

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

9. *Intégrales et étude de fonctions*

E.22 Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x)=a{\cdot}e^{a\cdot x}+a$$

On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 :

$$I(a)=\int_0^1 f_a(x)\,dx$$

Existe-t-il une valeur de a pour laquelle $I(a)$ est égale à 2? Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

E.23 **Partie A**

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle :
$$f'(x)=\frac{1}{x(x+1)^2}$$
Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ définie par :

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n :
$$u_{n+1}-u_n=f(n)$$
où f est la fonction définie dans la partie **A**.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Soit k un entier strictement positif. Justifier l'inégalité :
$$\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx\geqslant 0$$
En déduire que : $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx\leqslant\frac{1}{k}$

Démontrer l'inégalité : $\ln(k+1)-\ln k\leqslant\dfrac{1}{k}$

b. Écrire l'inégalité précédente en remplaçant successivement k par 1, 2, …, n et démontrer que pour tout entier strictement positif n :
$$\ln(n+1)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n :
$$u_n\geqslant 0$$

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

10. *Intégrale et familles de fonctions*

E.24 On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

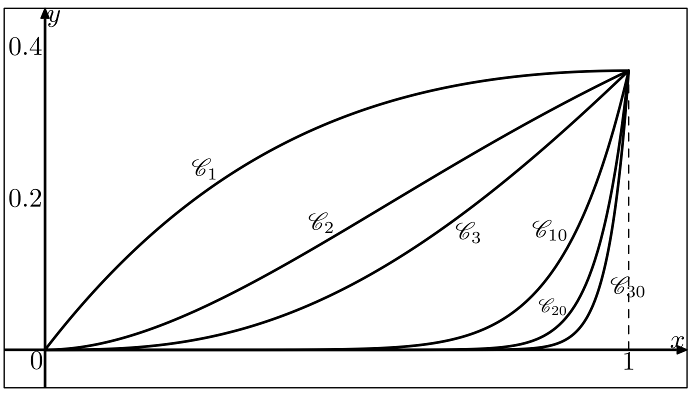
$$I_n=\int_0^1 x^n{\cdot}e^{-x}\,dx$$

1. a. On considère les deux fonctions f et g définies par :
$$f(x)=x{\cdot}e^{-x}\quad;\quad g(x)=(-x-1){\cdot}e^{-x}$$
Montrer que la fonction g est une primitive de la fonction f.

b. Calculer I_1.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions de courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{20}$, $\mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0\leqslant x\leqslant 1$.



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.

(b) Démontrer cette conjecture.

(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

(d) Déterminer : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} I_n$.

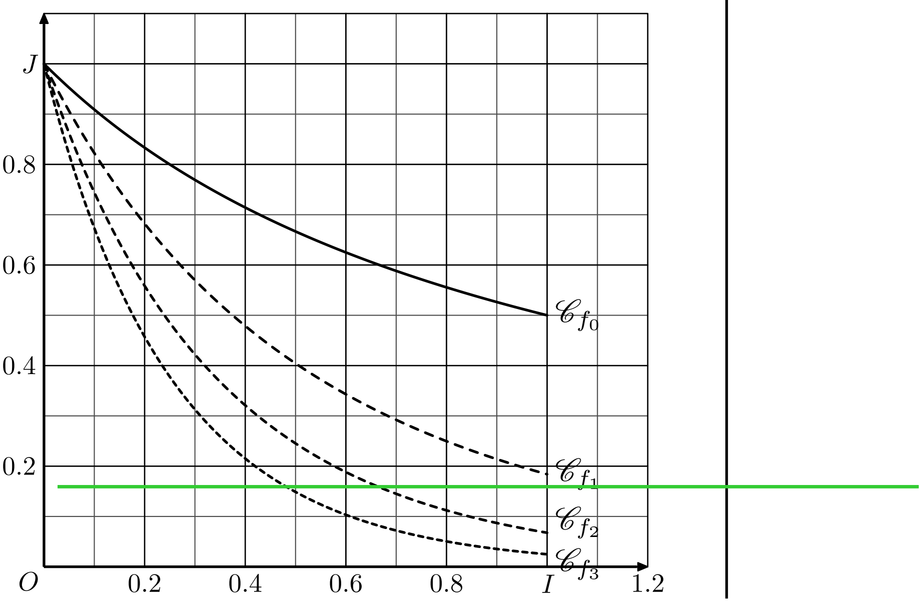
E.25 On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

(1) Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de n.



(a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

(b) Démontrer cette conjecture.

(2) (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;1]$:

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$$

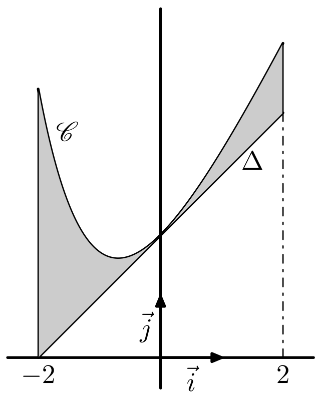
(b) Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

11. *Aire d'un domaine compris entre deux courbes*

E.26

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les deux courbes $\mathscr{C}$ et Δ où :

- la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie par :
  $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$
- la droite Δ a pour équation réduite : $y = x + 2$



On considère le domaine grisé représenté ci-dessus et défini par :

- situé entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$;
- situé entre la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ.

(1) (a) Étudier les variations de la fonction de la fonction f définie par : $g(x) = f(x) - (x+2)$.

(b) Justifier que la droite Δ est située sous la courbe $\mathscr{C}$

(2) Déterminer l'aire du domaine grisé.

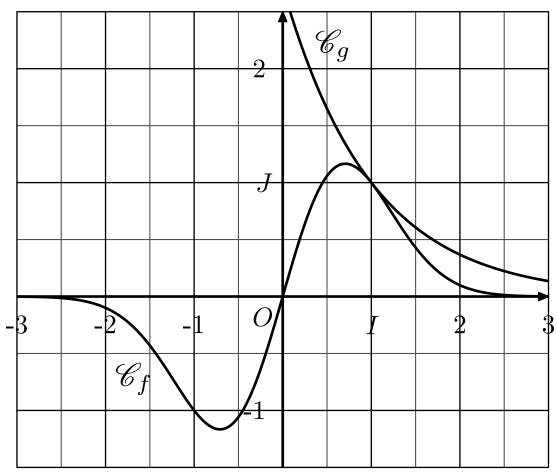
E.27 On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{1-x^2}$

et la fonction g définie pour tout réel x par :

$g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



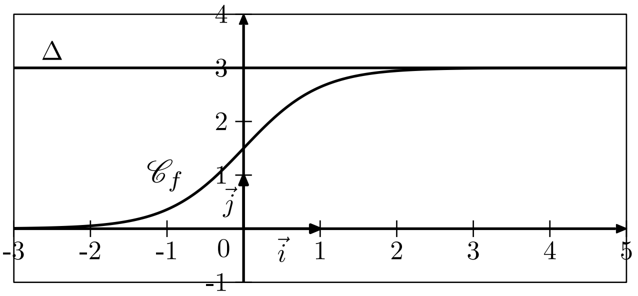
On admet que, sur $\mathbb{R}$, la courbe $\mathscr{C}_g$ se situe au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\cdot\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

E.28 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y=3$.



Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 3 - f(x)$

1. Justifier que la fonction h est positive.
2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$H(x) = -\frac{3}{2}\cdot\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$$
   Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
3. Soit a un réel strictement positif.
   a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale :
   $$\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$$
   b. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\cdot\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.
   c. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan défini par :
   $$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$$
   Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$

12. *Moyenne d'une fonction*

E.29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{4\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+7}$$

1. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\,;\ln 7\right]$.

E.30 Pour la question ci-dessous, trois réponses sont proposées dont une seule exacte. Le choix d'une réponse doit être justifié :

La valeur moyenne de la fonction f est définie sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est égale à :

a. $-\dfrac{\pi}{2}$ b. $\dfrac{\pi}{4}$ c. $\dfrac{\pi}{2}$

13. *Un peu plus loin*

E.31 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^-x}$$

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

On note v la primitive de u sur $\mathbb{R}$ telle que $v(1) = \dfrac{\pi}{4}$. On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2+1}$
2. Démontrer que, pour tout réel x, f est la dérivée de la fonction :
   $x \longmapsto v\left(\mathrm{e}^x\right)$.
3. On considère la suite $\left(J_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
   $$J_n = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$$
   On admet que la suite $\left(J_n\right)$ est convergente et admet pour limite un réel L.

   Déterminer la valeur exacte de L.

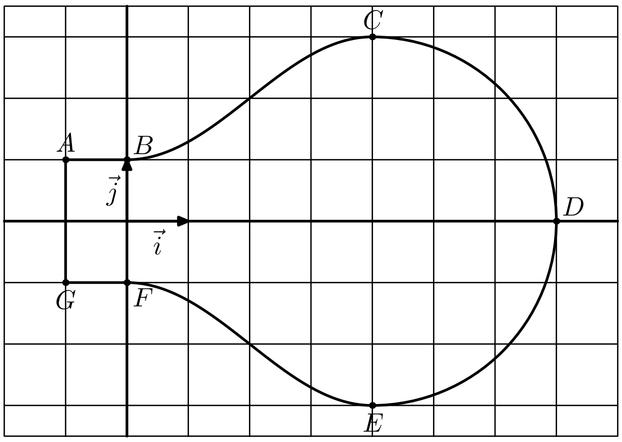
14. *Exercices non-classés*

E.32 Dans cet exercice, on s'intéresse au volume d'une ampoule basse consommation.

Partie A - Modélisation de la forme de l'ampoule

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

On considère les points $A(-1\,;1)$, $B(0\,;1)$, $C(4\,;3)$, $D(7\,;0)$, $E(4\,;-3)$, $F(0\,;-1)$ et $G(-1\,;-1)$.
On modélise la section de l'ampoule par un plan par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-dessous :



La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose de la manière suivante :

- la portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante h définie sur l'intervalle $[-1\,;0]$ par $h(x)=1$;
- la portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par :
  $f(x) = a + b\cdot \sin\left(c+\frac{\pi}{4}\right)$
  où a, b et c sont des réels non nuls fixés et où le réel c appartient à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$;
- la portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre $[CE]$.

La partie de la courbe située en dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

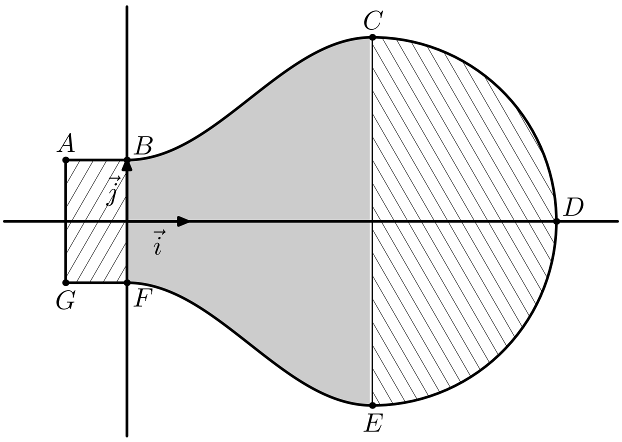
1. a. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;4]$, déterminer $f'(x)$.

   b. On impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction f soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel c.

2. Déterminer les réels a et b.

Partie B - Approximation du volume de l'ampoule

Par rotation de la figure précédente autour de l'axe des abscisses, on obtient un modèle de l'ampoule.
Afin d'en calculer le volume, on la décompose en trois parties comme illustrée ci-dessous :



On rappelle que :

- le volume d'un cylindre est donné par la formule $\pi\cdot r^2\cdot h$ où r est le rayon du disque de base et h est la hauteur ;
- Le volume d'une boule de rayon r est donné par la formule $\frac{\cdot}{\pi}\cdot r^3$.

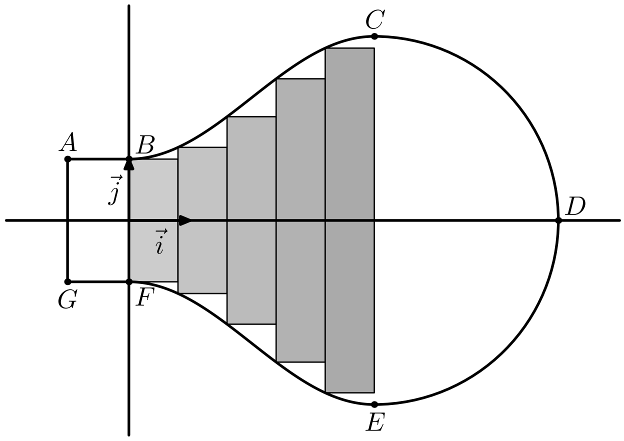
On admet également que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;4]$, $f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

1. Calculer le volume du cylindre de section le rectangle $ABFG$.

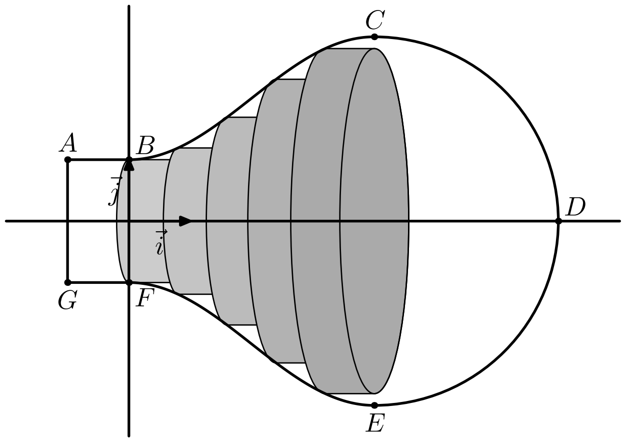
2. Calculer le volume de la demi-sphère de section le demi-disque de diamètre $[CE]$.

3. Pour approcher le volume du solide de section la zone grisée $BCEF$, on partage le segment $[OO']$ en n segments de même longueur $\frac{4}{n}$ puis on construit n cylindres de même hauteur $\frac{4}{n}$.

   a. **Cas particulier :** dans cette question uniquement, on choisit $n=5$.
   Calculer le volume du troisième cylindre, grisé dans les figures ci-dessous, puis en donner la valeur arrondie à 10^{-2}.



Vue dans le plan (BCE)



Vue dans l'espace

   b. **Cas général :** dans cette question, n désigne un entier naturel quelconque non nul.
   On approche le volume du solide de section $BCEF$ par la somme des volumes des n premiers cylindres ainsi créés en choisissant une valeur de n suffisamment grande.
   Recopier et compléter l'algorithme suivant de sorte qu'à la fin de son exécution, la variable V contienne la somme des volumes des n cylindres créés lorsque l'on

saisit b.

