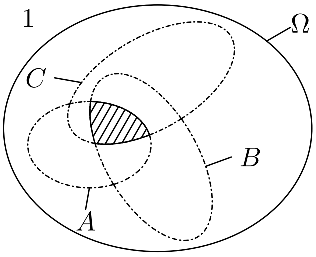
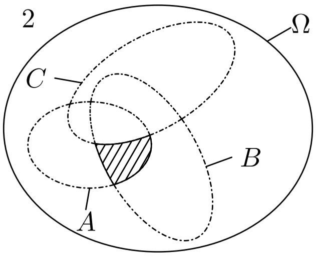
Terminale Spécialité / Combinatoire, dénombrement

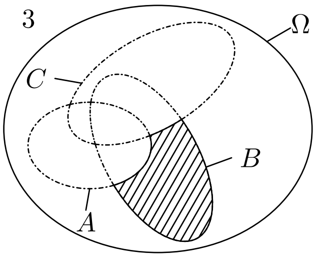
1. Notions sur les ensembles

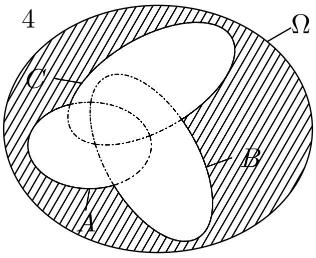
E.1 Dans un univers Ω, on considère les trois événements A, B et C représentés ci-dessous.

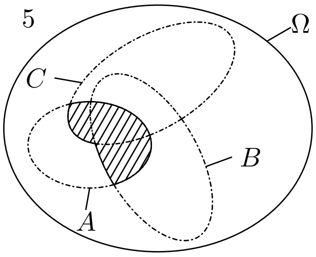
Pour chaque question, exprimer la partie hachurée à l'aide des événements A, B, C, des symboles de la réunion, de l'intersection et du complémentaire.

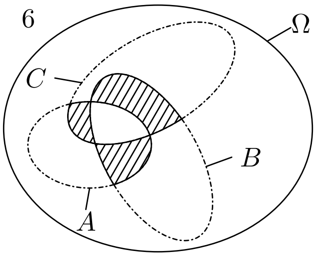
1


2


3


4


5


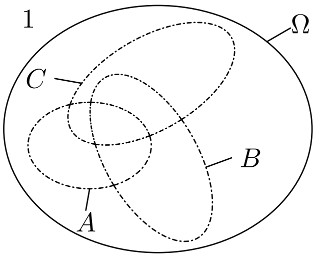
6


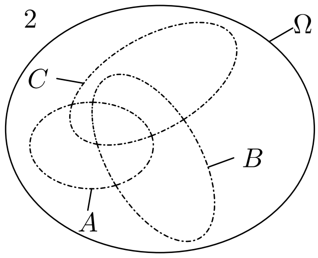
E.2 Dans un univers Ω, on considère les trois événements A, B et C représentés ci-dessous.

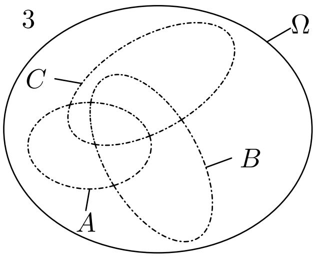
Pour chaque question, on considère une partie de l'univers Ω nommé M :

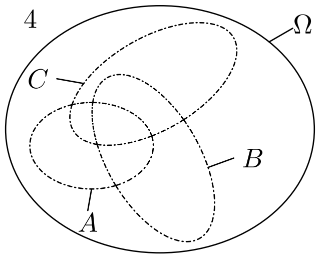
1. $M = A \cap C$
2. $M = C \cap \left(\overline{A \cap B \cap C}\right)$
3. $M = \overline{A \cup B \cup C}$
4. $M = B \cap C \cap \overline{A}$
5. $M = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap C \cap \overline{A}\right)$
6. $M = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right)$

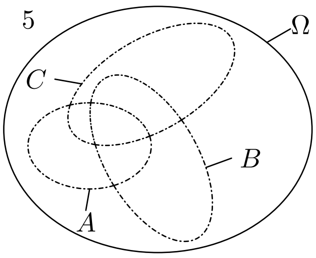
Représenter chacun des ensembles M dans les représentations ci-dessous :

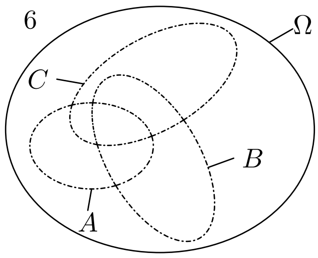
1


2


3


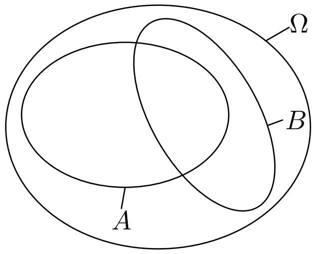
4


5


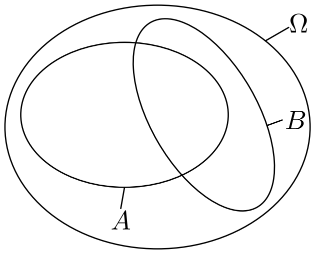
6


E.3 Dans un univers Ω, on considère les deux événements A et B.

(1) Représenter dans les diagrammes ci-dessous les deux événements M et N définis par :
$M = A\cap B \quad ; \quad N = \overline{A}\cup\overline{B}$



$A\cap B$



$\overline{A}\cup\overline{B}$

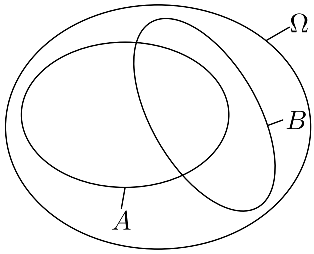
(2) On souhaite établir l'égalité des ensembles $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$:

(a) Pour tout événement élémentaire ω, établir l'implication :
$\omega\in\overline{A\cap B} \implies \omega\in\overline{A}\cup\overline{B}$

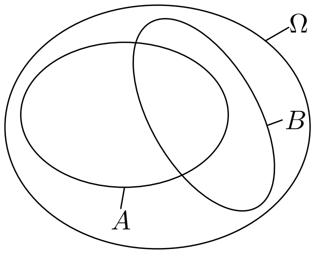
(b) Pour tout événement élémentaire ω, établir l'implication :
$\omega\in\overline{A}\cup\overline{B} \implies \omega\in\overline{A\cap B}$

E.4 Dans un univers Ω, on considère les deux événements A et B.

(1) Représenter dans les diagrammes ci-dessous les deux événements M et N définis par :
$M = A\cup B \quad ; \quad N = \overline{A}\cap\overline{B}$



$A\cup B$



$\overline{A}\cap\overline{B}$

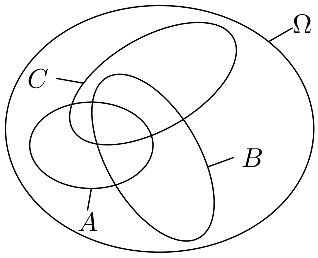
(2) On souhaite établir l'égalité des ensembles $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$:

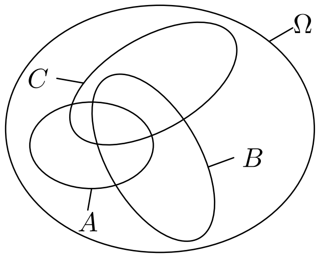
(a) Pour tout événement élémentaire ω, établir l'implication :
$\omega\in\overline{A\cup B} \implies \omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$

(b) Pour tout événement élémentaire ω, établir l'implication :
$\omega\in\overline{A}\cap\overline{B} \implies \omega\in\overline{A\cup B}$

E.5 Dans un univers Ω, on considère les trois événements A, B et C.

(1) Dans les diagrammes ci-dessous, représenter les deux événements M et N définis par :
$M = A\cap(B\cup C) \quad ; \quad N = (A\cap B)\cup(A\cap C)$





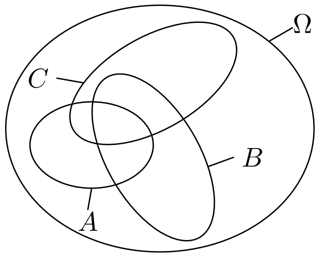
(2) On souhaite établir l'égalité des ensembles :
$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

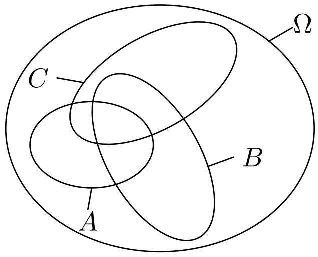
(a) Pour tout événement élémentaire ω, établir l'implication :
$\omega\in A\cap(B\cup C) \implies \omega\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(b) Pour tout événement élémentaire ω, établir l'implication :
$\omega\in(A\cap B)\cup(A\cap C) \implies \omega\in A\cap(B\cup C)$

E.6 Dans un univers Ω, on considère les trois évènements A, B et C.

(1) Dans les diagrammes ci-dessous, représenter les deux évènements M et N définis par :
$M = A\cup(B\cap C) \quad ; \quad N = (A\cup B)\cap(A\cup C)$





(2) On souhaite établir l'égalité des ensembles :
$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

(a) Pour tout évènement élémentaire ω, établir l'implication :
$\omega\in A\cup(B\cap C) \implies \omega\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(b) Pour tout évènement élémentaire ω, établir l'implication :
$\omega\in(A\cup B)\cap(A\cup C) \implies \omega\in A\cup(B\cap C)$

2. *Factorielle*

E.7 Résoudre dans $\mathbb{N}$, les équations suivantes :

(a) $n! = 5040$ (b) $(n+1)! = 720$ (c) $n! = 72\times(n-2)!$

E.8 Déterminer la valeur des expressions suivantes :

(a) $\dfrac{9!\times 12!}{8!\times 11!}$ (b) $\dfrac{(15!)^2}{13!\times 14!}$

3. *Factorielle et combinatoire*

E.9 On dispose de 26 cartes où sont écrites les 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement et sans remise trois cartes de ce jeu.

1. Combien de mots de trois lettres *(ayant un sens ou non)* peut être composés?

   Justifier que ce nombre s'écrit : $\dfrac{26!}{23!}$

2. a. Combien de mots commençant par la lettre B peuvent-ils être créés?

   b. En déduire la probabilité de l'événement :
   A_1 : "*Le mot commence par la lettre B*".

3. Déterminer la probabilité de l'événement :
   A_2 : "*La seconde lettre du mot est la lettre B*".

4. Quelle est la probabilité de l'événement :
   C : "*Le mot contient la lettre B*".

E.10 Une association est composée de 18 membres, 7 hommes et 11 femmes. Chaque année, le comité de gestion doit être élu. Il est composé d'un président et de deux vices présidents.
Les status de l'association stipulent :

- si le président est un homme, les deux vices présidents doivent être des femmes ;
- si le président est une femme, les deux vices présidents doivent être des hommes ;

Combien de comités de gestion différents peuvent être constitués avec les membres de l'association?

a. 154 b. 385 c. 616 d. 1386

4. Combinaison

E.11 Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a. $\dbinom{15}{13}+\dbinom{9}{6}$ b. $\dbinom{15}{7}+\dbinom{15}{8}-\dbinom{16}{8}$

E.12 Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation : $\dbinom{8}{k}=56$

5. Triangle de Pascal

E.13

1. Reconstruire le triangle de Pascal jusqu'à $n=7$.
2. À l'aide du tableau de la question 1, donner les valeurs des coefficients binomiaux suivant :

   a. $\dbinom{5}{3}$ a. $\dbinom{4}{0}$ a. $\dbinom{4}{2}$ a. $\dbinom{7}{5}$

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants :

   a. $\dbinom{5}{3}$ a. $\dbinom{12}{5}$ a. $\dbinom{8}{6}$ a. $\dbinom{7}{2}$

6. Probabilité combinatoire

E.14 Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.

1. Vérifier que $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)=\dfrac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
3. Calculer la probabilité de l'événement suivant :
   A : "*les deux boules tirées sont de même couleur*"

E.15 Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher.

On tire deux boules au hasard simultanément.

1. On considère l'événement :
   A : "*les deux boules tirées sont de la même couleur*".

   Déterminer la probabilité de l'événement A.

2. On considère l'événement :
   A : "*une seule des deux boules tirées est rouge*".

   Déterminer la probabilité de l'événement B.

E.16 Pour chacune des questions suivantes, une ou deux des réponses proposées sont correctes. Aucune justification n'est attendue :

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

   a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{21}{32}$ c) $\frac{11}{32}$ d) $\frac{3}{8}$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes. La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

   a) $\frac{105}{248}$ b) $\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$ c) $\frac{21^2}{32^2}$ d) $\frac{5^2}{8^2}$

7. *Anciennes annales du baccalauréat (avant 2012)*

E.17 Un meuble est composé de 10 tiroirs $T_1, T_2, \ldots, T_{10}$.
Une personne place au hasard une boule dans des tiroirs et une autre est chargée de *trouver le tiroir contenant la boule* à l'aide de la stratégie suivante :

> *La personne ouvre le tiroir T_1. Si la boule est dans le tiroir T_1, la recherche est achevée, sinon la personne ouvre le tiroir T_2, et ainsi de suite... en respectant l'ordre des numéros de tiroirs.*

On remarquera qu'avec cette stratégie, le tiroir T_{10} n'est jamais ouvert.
Pour i entier compris entre 1 et 10 $(1 \leqslant i \leqslant 10)$, on appelle B_i l'événement "*la boule se trouve dans le tiroir T_i*".

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs qui ont été ouverts afin de localiser la boule avec cette stratégie.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles de X.
2. a) Montrer que, pour i entier compris entre 1 et 8 $(1 \leqslant i \leqslant 8)$, l'événement $[X = i]$ est l'événement B_i.
   b) Justifier que l'événement $[X = 9]$ est la réunion des événements B_9 et B_{10}.
   c) Déterminer la loi de probabilité de X.
   d) Calculer l'espérance mathématique de X.

E.18 *On note $p_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.*

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note A_0 l'événement : "*on n'a obtenu aucune boule noire*"

   On note A_1 l'événement : "*on a obtenu une seule boule noire*" ;

   On note A_2 l'événement : "*on a obtenu deux boules noires*"

   Calculer les probabilités A_0, A_1 et A_2.
2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.

   On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

   On note B_0 l'événement : "*on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2*"

   On note B_1 l'événement : "*on a obtenu une seule boule noire au tirage n°2*"

   On note B_2 l'événement : "*on a obtenu deux boules noires au tirage n°2*"

   a) Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.
   b) En déduire $p(B_0)$.
   c) Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.
   d) On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage ; Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier?
3. On considère l'événement R : "*il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'urne*".

   Montrer que : $p(R) = \frac{1}{3}$.

E.19 Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I, X.

Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivantes :

- À chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O ;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;
- on ne tient pas compte des passages par O.

Partie A - Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\dfrac{1}{5}$.
2. On note E l'évènement : "*au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les* 3 *sommets* S, I *et* X *dans cet ordre*".

   Démontrer que la probabilité de E est égale à $\dfrac{4}{125}$.
3. On note F l'évènement : "*au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les* 3 *sommets* S, I *et* X *dans un ordre quelconque*".

   Déterminer la probabilité de F.

Partie B - Plusieurs robots

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.

Quel nombre minimal n de robots doit-il avoir pour que la probabilité de l'évènement : "*au moins l'un des robots passe successivement par les sommets* S, I *et* X *dans cet ordre*" soit supérieure ou égale à 0,99?

E.20 On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année *(n étant un grand nombre inconnu)*, on admet que la variable aléatoire $\mathcal{S}_n$ qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale ; on estime que l'espérance mathématique de $\mathcal{S}_n$ notée $E(\mathcal{S}_n)$ est égale à 10.

Soit p la probabilité pour qu'un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité :
   $$\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k) = \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{10}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$$
   où k est un entier naturel tel que $0\leqslant k\leqslant n$.
2. a. Établir l'égalité :
   $$\ln\left[\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}0)\right] = -10\times\frac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{\frac{-10}{n}}$$
   où ln désigne la fonction logarithme népérien.

   En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}0)=\mathrm{e}^{-10}$.

   b. Démontrer que :
   $$\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k{+}1) = \mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k)\times\frac{n-k}{n-10}\times\frac{10}{k+1}$$
   où k est un entier naturel tel que $0\leqslant k\leqslant n{-}1$

   c. Démontrer que si :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k) = \mathrm{e}^{-10}\cdot\frac{10^k}{k!}\quad\text{pour } 0\leqslant k\leqslant n,$$
   alors on a également :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k{+}1) = \mathrm{e}^{-10}\cdot\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}$$
   pour $0\leqslant k{+}1\leqslant n$.

   d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k) = \mathrm{e}^{-10}\cdot\frac{10^k}{k!}$$
   où k est un entier naturel tel que $0\leqslant k\leqslant n$.
3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $\mathrm{e}^{-10}\cdot\dfrac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité qu'au cours de cette année, il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

8. *Exercices non-classés*

E.21 Déterminer les deux entiers naturels a et b tels que :
$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$$