





Terminale Spécialité / Compléments sur la dérivation et convexité

1. Dérivées de fonctions composées

E.1   Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a $f(x) = (3 \cdot x + 5)^5$ **b** $g(x) = \frac{1}{3 \cdot x^4 + 1}$

c $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ **d** $j(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

E.2   On considère la fonction f définie par :

$$f: x \mapsto \sqrt{-2x^2 - x + 6}$$



- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f .

E.3   On considère la fonction f définie sur



l'intervalle $] -\infty ; -\frac{1}{2}]$ par la relation suivante :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$$

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f en -1



E.4   Déterminer l'expression, sous forme simplifiée, de la fonction f' dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = (\sqrt{x+1})^3$$



E.5   Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner l'expression simplifiée de leur fonction dérivée :

a $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)\sqrt{x}$ **b** $g(x) = (2x+1) \cdot \sqrt{3-x}$

2. Dérivées de fonctions composées de la fonction exponentielle



E.6   Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

a $f(x) = e^{2-x^2}$ **b** $f(x) = e^{x^2+1}$ **c** $f(x) = e^{x^2+x+1}$

E.7   Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

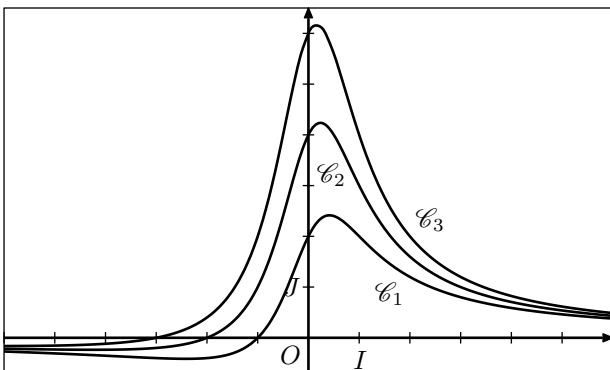
a $f(x) = (2 \cdot x + 1)e^{x+1}$ **b** $f(x) = x \cdot e^{3 \cdot x^2}$

3. Dérivées de familles de fonctions

E.8   On considère pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f_n(x) = \frac{2 \cdot (x+n)}{1+x^2}$$



Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n .



- Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'_n .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente (d_n) à la courbe \mathcal{C}_n au point d'abscisse 1.
- a** Établir l'égalité suivante :
$$n \cdot x^3 - (2 \cdot n + 1) \cdot x^2 + (n + 2) \cdot x - 1 = (x - 1)^2 \cdot (n \cdot x - 1)$$

b Étudier la position relative de la droite (d_n) et de la courbe \mathcal{C}_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

4. Tangente de fonctions composées

E.9   On considère la fonction g définie par la relation :

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

On note \mathcal{C}_g la courbe représentative de la fonction g .

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .

- ② Déterminer l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.

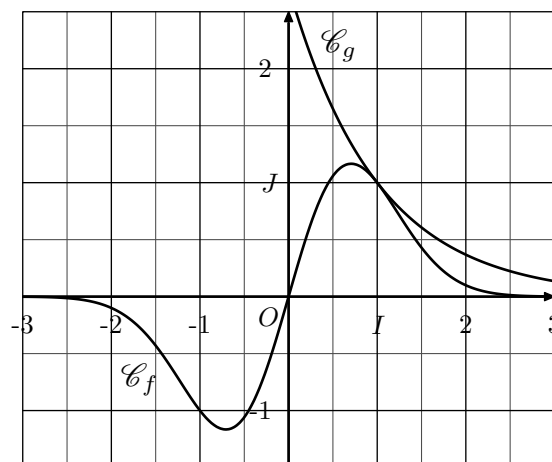
E.10 📏 📐 📅 ⚠️ On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$$

et la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{1-x}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g respectivement des fonctions f et g .



Justifier qu'au point d'abscisse 1, les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g admettent la même tangente.

5. Tableau de variations d'une fonction composée

E.11 📏 📐 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{6x^2 + 13x - 5}$$

- ① Justifier que la fonction f admet pour ensemble de défini-

tion la partie I de \mathbb{R} définie par :

$$I =]-\infty; -\frac{5}{2}] \cup [\frac{1}{3}; +\infty[.$$

- ② Déterminer le sens de variation de la fonction f sur son ensemble de définition I .

6. Etude de la fonction dérivée de fonctions composées

E.12 📏 📐 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

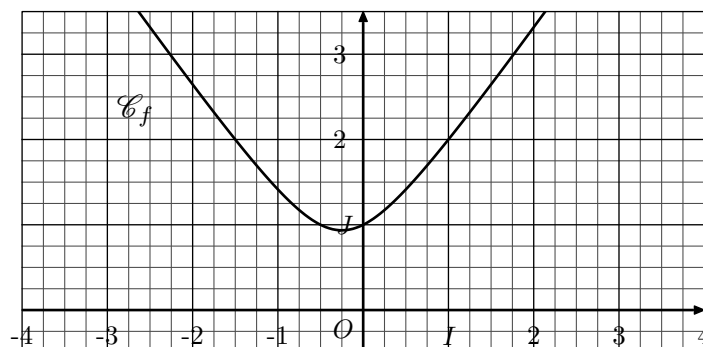
$$f(x) = (5x^2 + 3x + 2)^5$$

- ① Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f .
② Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

E.13 📏 📐 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$$



- ① Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
② Déterminer le tableau de variations de la fonction f .
③ Dans un repère $(O; I; J)$, on donne la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f :



- a) Déterminer l'équation de la tangente (d) à la courbe

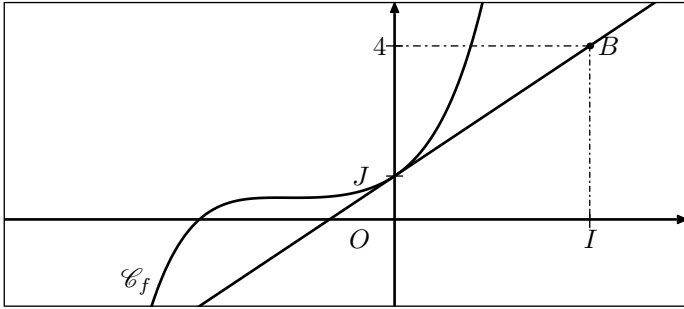
\mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

- (b) Tracer la droite (d) dans le repère ci-dessus.

E.14   On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = (a \cdot x + 1) \cdot (2x^2 + x + 1)^2$$

Dans un repère $(O; I; J)$ orthogonal donné ci-dessous, on représente la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f :





La droite (d) passe par les points J et $B(1; 4)$.

- 1 (a) Justifier que la courbe \mathcal{C}_f passe par le point J .
 - (b) Déterminer le coefficient de la droite (JB) .
 - (c) Démontrer que tout réel x , on a :

$$f'(x) = [10ax^2 + (3a + 8) \cdot x + (a + 2)] \cdot (2x^2 + x + 1)$$
 - (d) On suppose que la droite (JB) est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point J . Déterminer la valeur de a . Justifier votre réponse.
- 2 On admet que f' a pour expression :

$$f'(x) = (10x^2 + 11x + 3)(2x^2 + x + 1)$$
 Déterminer les sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

7. Lien entre dérivée et nombre dérivé




E.15   Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^4 - 81}{h}$

(b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6 \cdot h + 1} - 1}{h}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)^8 - 1}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{x}$




E.16    Soit f une fonction numérique dériv-

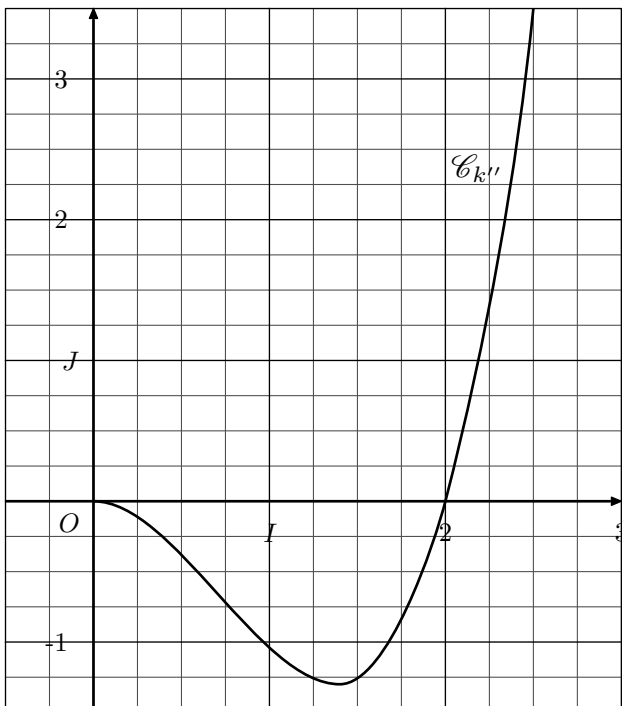
able.

- 1 Soit $a \in \mathcal{D}_f$. Établir la limite suivante :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{x \cdot f(a) - a \cdot f(x)}{x - a} = f(a) - a \cdot f'(a)$$
 On posera : $x = a + h$.
- 2 En déduire la limite : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{x^3 \cdot a - a^3 \cdot x}{x - a}$

8. Convexité : graphiquement

E.17    On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0; +\infty[$.



Parmi les réponses proposées, laquelle est correcte?

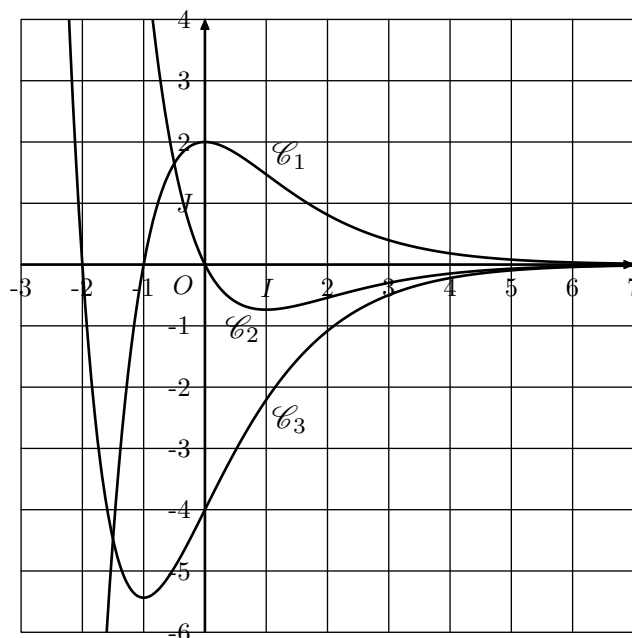
- 1 k est concave sur l'intervalle $[1; 2]$.
- 2 k est convexe sur l'intervalle $[0; 2]$.
- 3 k est convexe sur $[0; +\infty[$.
- 4 k est concave sur $[0; +\infty[$.

E.18 Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 définies sur $[-3;7]$ ont été représentées.

L'une de ces fonctions représente une fonction f , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f .

Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.



9. Convexité: étude de fonctions

E.19 Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte.

La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3 - 9x$ est convexe sur l'intervalle :

- (a) $]-\infty; +\infty[$ (b) $[0; +\infty[$
 (c) $]-\infty; 0]$ (d) $[-3; 3]$

E.20 On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-2; 4]$ par : $f(x) = (x+2) \cdot e^{-x+1}$

On note f' la fonction dérivée de f .

① Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[-2; 4]$, on a : $f'(x) = -(x+1) \cdot e^{-x+1}$

② Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	factoriser(dériver $[-(x+1) \cdot \exp(-x+1)]$) $x \cdot \exp(-x+1)$
2	intégrer $[(x+2) \cdot \exp(-x+1)]$ $-(x+3) \cdot \exp(-x+1)$

En utilisant ces résultats, répondre à la question suivante :

10. Convexité et positions des tangentes

E.22 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par :

$$f(x) = -x \cdot \ln(x) + 2 \cdot x + 1$$

Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. Justifier.

E.21 Soit f la fonction définie sur $[0; 8]$ par :

$$f(x) = \frac{0,4}{20 \cdot e^{-x} + 1} + 0,4$$

① Montrer que $f'(x) = \frac{8 \cdot e^{-x}}{(20 \cdot e^{-x} + 1)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

② Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :




1	$f'(x) := 8 \cdot e^{-x} / (20 \cdot e^{-x} + 1)^2$ $f'(x) := \frac{8 \cdot e^{-x}}{400(e^{-x})^2 + 40 \cdot e^{-x} + 1}$
2	$g(x) := \text{Dérivée}[f'(x)]$ $g(x) := \frac{160 \cdot (e^{-x})^2 - 8 \cdot e^{-x}}{8000 \cdot (e^{-x})^3 + 1200 \cdot (e^{-x})^2 + 60 \cdot e^{-x} + 1}$
3	Factoriser $[g(x)]$ $8 \cdot e^{-x} \cdot \frac{20 \cdot e^{-x} - 1}{(20 \cdot e^{-x} + 1)^3}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

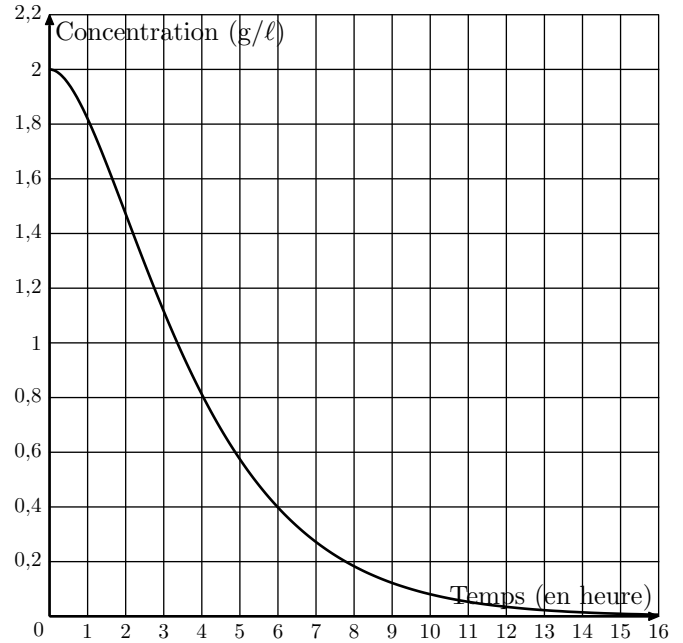
On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

Montrer que la courbe \mathcal{C} est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0; 10]$.

11. Point d'inflexion : graphiquement




E.23    On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes en litres, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie ci-dessous :



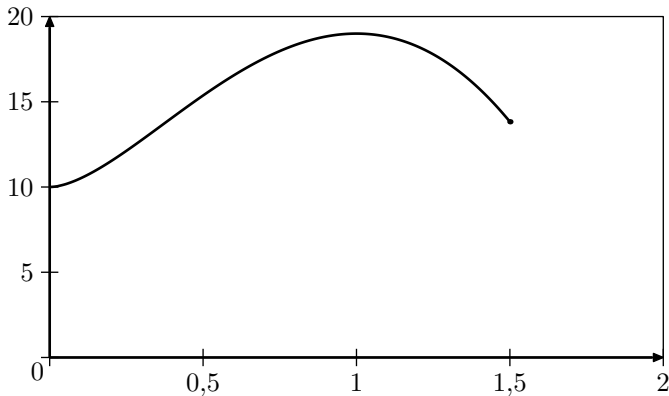
En vous aidant d'une lecture graphique et sans justifier, au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle?

12. Point d'inflexion : étude de fonctions

E.24    On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 15]$ par :




$$f(x) = 9 \cdot x^2 \cdot (1 - 2 \cdot \ln x) + 10.$$

La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



On admet que $f''(x) = -36 \cdot \ln x - 36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $]0; 15]$.

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1} .

E.25    On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20; 20]$ par :




$$f(x) = (-2 \cdot x + 30) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$$

- 1 **a** Montrer que $f'(x) = (-0,4 \cdot x + 4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20; 20]$.
- b** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-20; 20]$.
On précisera la valeur exacte du maximum de f .
- 2 **a** Montrer que, sur l'intervalle $[-20; 20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α .
- b** Donner un encadrement de α d'amplitude 0,2.
- 3 Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $(-10 \cdot x + 200) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$ $(-2 \cdot x + 30) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$
2	Dériver $(2 \cdot x + 30) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$ $(-0,4 \cdot x + 4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$
3	Dériver $(-0,4 \cdot x + 4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$ $(-0,08 \cdot x + 0,4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$

Répondre à la question suivante en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

E.26    On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{0,5 + 100 \cdot e^{-x}}$$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0; 10]$.

① Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $[0; 10]$,

$$\text{on a : } f'(x) = \frac{100 \cdot e^{-x}}{(0,5 + 100 \cdot e^{-x})^2}$$

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[0; 10]$. Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{100 \cdot e^{-x} \cdot (100 \cdot e^{-x} - 0,5)}{(0,5 + 100 \cdot e^{-x})^3}$$

13. Exercices non-classés

E.27   On considère la fonction : $f : x \mapsto \sqrt{-2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 3}$

① Montrer l'égalité suivante :

$$(2 \cdot x - 1)(3 - x) = -2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 3$$

② a) Étudier le signe de $-2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 3$ en fonction de la valeur de x .

b) En déduire l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f .

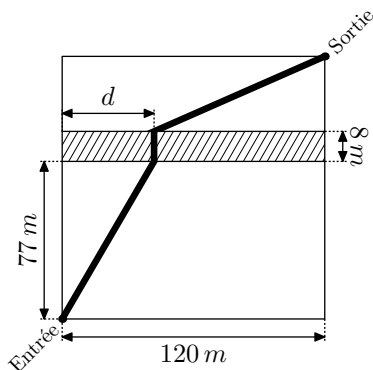
③ Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f .

④ Dresser le tableau de variations de la fonction f .




E.28  

La ville "Promenade" souhaite emménager un terrain de forme carré traversé par une rivière traversant latéralement le terrain.

La figure ci-dessous représente le terrain et la rivière est la partie hachurée :



À quelle distance d doit-on placer le pont pour que la distance parcourue par un visiteur soit minimale ?

E.29    On considère un segment $[AB]$ de longueur 10 centimètres et un point M de ce segment, différent de A et B . Les points N et P sont tels que $AMNP$ est un carré.

L'objectif de l'exercice est de déterminer le point M du segment $[AB]$ pour lequel la distance BN est minimale.

Les distances sont exprimées en centimètres.

① On pose : $AM = x$.

a) Faire une figure.

b) Déterminer l'intervalle des valeurs possibles pour x .

② a) Montrer que, dans l'intervalle $[0; 10]$, l'inéquation $100 \cdot e^{-x} - 0,5 \geq 0$ est équivalente à l'inéquation : $x \leq -\ln(0,005)$.

b) En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $[0; 10]$.

③ On appelle \mathcal{C}_f la courbe représentative de f tracée dans un repère.

Montrer, à l'aide de la question ②, que la courbe \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion noté I , dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.

④ En utilisant les résultats de la question ②, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

c) Déterminer en fonction de x la distance BM .

d) Déterminer en fonction de x la distance BN .

(On rappelle le théorème de Pythagore : dans un triangle ABC rectangle en A , on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$)

② On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par : $f(x) = \sqrt{2 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 100}$

La fonction dérivée f' de f est définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par : $f'(x) = \frac{2x - 10}{\sqrt{2 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 100}}$.

a) Répondre aux questions suivantes

i) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$



ii) Montrer que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle $[0; 10]$ que l'on précisera.

b) Répondre aux questions suivantes :

i) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité un centimètre.

ii) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 8$. On fera apparaître les traits de construction utiles et on donnera des valeurs approchées des solutions lues.

③ En utilisant les résultats précédents, déterminer le point M du segment $[AB]$ pour lequel la distance BN est minimale.

E.30   Le tableau présente pour chaque ligne une fonction et l'expression de la dérivée. Établir l'exactitude de chaque ligne.

Fonction	Image de x	Nombre dérivé en x
f	$(3x + 2)^6$	$18 \cdot (3x + 2)^5$
g	$4 \cdot (3 - 2x)^4$	$-32 \cdot (3 - 2x)^3$
h	$\frac{1}{-2x^2 + 3x + 1}$	$\frac{4x - 3}{(2x^2 - 3x - 1)^2}$
j	$\sqrt{5x^2 + 6x - 2}$	$\frac{5x + 3}{\sqrt{5x^2 + 6x - 2}}$
k	$\frac{2x - 1}{\sqrt{3 - x}}$	$\frac{2x - 11}{2 \cdot (x - 3) \cdot \sqrt{3 - x}}$