Terminale Spécialité / Compléments sur la dérivation et convexité

1. Dérivées de fonctions composées

E.1 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = (3{\cdot}x+5)^5$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{3{\cdot}x^4+1}$

(c) $h(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ (d) $j(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

E.2 Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt{6x^2-3x+1}$ (b) $g(x) = (4{\cdot}x-1)^4$

E.3 On considère la fonction f définie par :

$f\colon x \longmapsto \sqrt{-2x^2-x+6}$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

E.4 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]$ par la relation par la relation suivante :

$f(x) = \sqrt{2x^2-3x-2}$

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en -1.

E.5 Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = (3x+2)^5$ (b) $g(x) = \sqrt{1-2x}$

(c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ (d) $j(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

E.6

(1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par : $f\colon x \longmapsto 5{\cdot}(x^2+x+1)^4$

(2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie par : $g\colon x \longmapsto \dfrac{2}{5}x^2{\cdot}\sqrt{3-2x}$

Écrire cette fonction dérivée de la fonction g sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est $\sqrt{3-2x}$.

E.7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x) = (a{\cdot}x^2+b{\cdot}x)^4{\cdot}(c{\cdot}x+1)$

où a, b et c sont trois entiers relatifs.

On sait que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$f'(x) = (-18x^2+21x-4){\cdot}(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x)^3$

Déterminer l'expression de la fonction f.

E.8 Déterminer l'expression, sous forme simplifiée, de la fonction f' dérivée de la fonction f définie par :

$f(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^3$

E.9 Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner l'expression simplifiée de leur fonction dérivée :

(a) $f(x) = (3x^2-2x+1)\sqrt{x}$ (b) $g(x) = (2x+1){\cdot}\sqrt{3-x}$

2. Dérivées de fonctions composées de la fonction exponentielle

E.10 Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{2-x^2}$ (b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$ (c) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+x+1}$

E.11 Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

(a) $f(x) = (2{\cdot}x+1)\mathrm{e}^{x+1}$ (b) $f(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{3{\cdot}x^2}$

E.12 Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ (2) $g(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{x^2+1}$

(3) $h(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ (4) $j(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$

(5) $k(x) = \mathrm{e}^{x^2+x}$ (6) $\ell(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$

E.13 Dans le tableau ci-dessous, sont données des fonctions et l'expression de leurs dérivées. Vérifier l'exactitude de ce tableau :

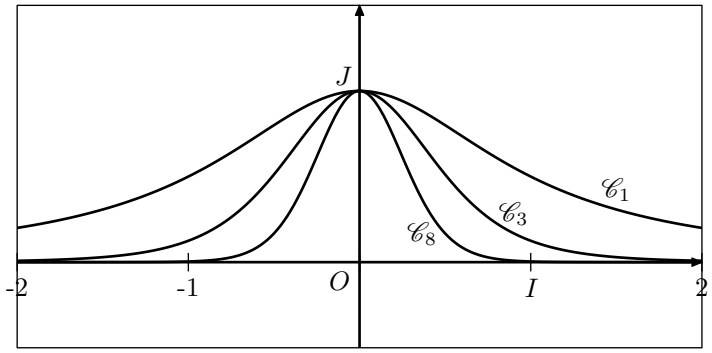
	$f(x)$	$f'(x)$
(a)	$3x{\cdot}\mathrm{e}^{5x^2+3}$	$(30x^2+3){\cdot}\mathrm{e}^{5x^2+3}$
(b)	$\mathrm{e}^{3-x^2}{\cdot}\mathrm{e}^{x^2+1}$	0
(c)	$\dfrac{\mathrm{e}^{2-x^2}}{2x}$	$-\dfrac{(2x^2+1)\mathrm{e}^{2-x^2}}{2x^2}$
(d)	$\mathrm{e}^{x\sqrt{x}}$	$\dfrac{3}{2}{\cdot}\sqrt{x}{\cdot}\mathrm{e}^{x\sqrt{x}}$
(e)	$\mathrm{e}^{\frac{2x}{2-x}}$	$\dfrac{4}{(x-2)^2}{\cdot}\mathrm{e}^{\frac{2x}{2-x}}$

3. Dérivées de familles de fonctions

E.14 On considère, pour tout entier naturel n non-nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.



1. Déterminer l'expression de la dérivée f'_n de la fonction f_n.
2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}_3$ au point d'abscisse 1.

   b. On considère la droite (Δ) d'équation réduite :

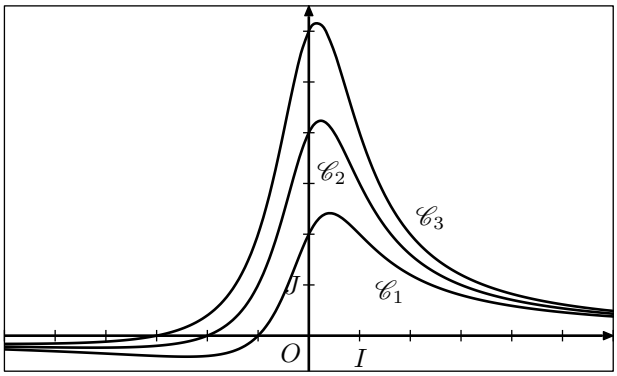
   $$y = \frac{5}{32}\cdot x + \frac{3}{16}$$

   Parmi la famille de courbe $(\mathscr{C}_n)$, quelle est celle qui admet la droite (Δ) comme tangente au point d'abscisse -1? Justifier votre réponse.

E.15 On considère pour tout entier naturel n non-nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_n(x) = \frac{2\cdot(x+n)}{1+x^2}$$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.



1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'_n.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d_n) à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 1.
3. a. Établir l'égalité suivante :

   $$n\cdot x^3-(2\cdot n+1)\cdot x^2+(n+2)\cdot x-1 = (x-1)^2\cdot(n\cdot x-1)$$

   b. Étudier la position relative de la droite (d_n) et de la courbe $\mathscr{C}_n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

4. Tangente de fonctions composées

E.16 On considère la fonction g définie par la relation :

$$g(x) = \sqrt{x^2-2x+3}$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.

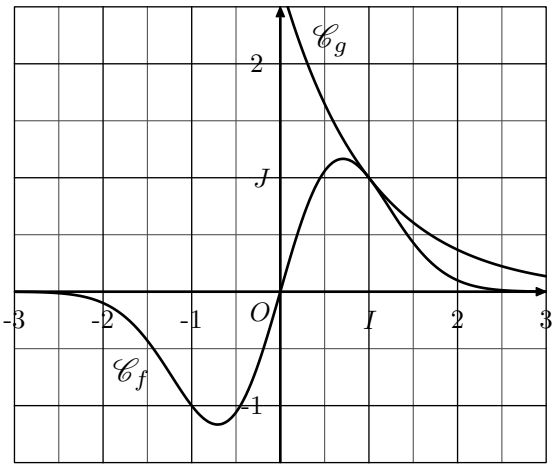
E.17 On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x\cdot \mathrm{e}^{1-x^2}$$

et la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Justifier qu'au point d'abscisse 1, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent la même tangente.

5. Tableau de variations d'une fonction composée

E.18 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{6x^2+13x-5}$$

1. Justifier que la fonction f admet pour ensemble de définition la partie I de $\mathbb{R}$ définie par :

$I = \left]-\infty\,;-\dfrac{5}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

(2) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur son ensemble de définition I.

E.19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}}$$

(1) Établir que la dérivée f' de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

(2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
On admettra les deux limites :

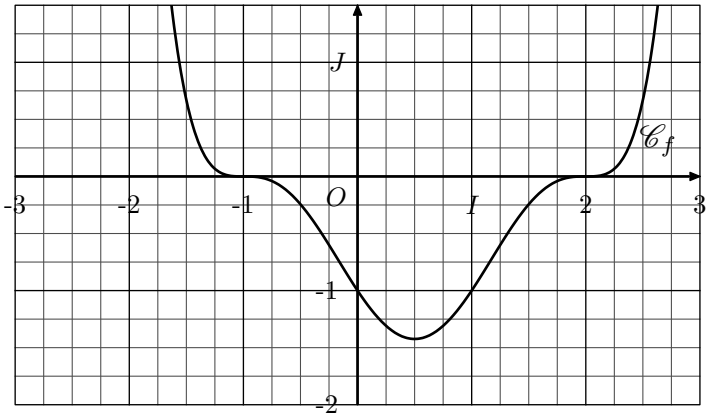
$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$$

6. *Etude de la fonction dérivée de fonctions composées*

E.20 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{8}\cdot\left(x^2-x-2\right)^3$$

Ci-dessous, est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.



(1) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(2) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
(on utilisera la valeur approchée $f(\frac{1}{2}) \approx -1{,}4$)

E.21 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = (5x^2+3x+2)^5$$

(1) Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

(2) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

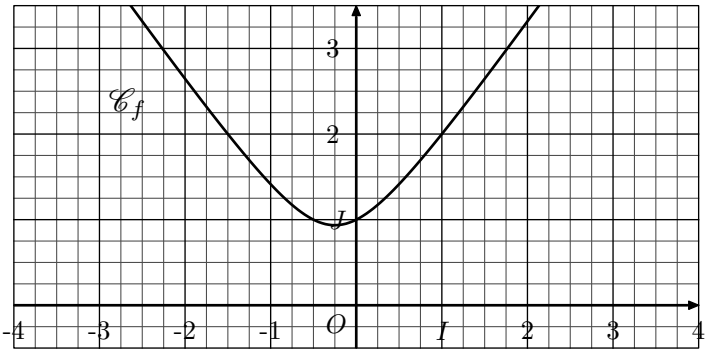
E.22 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{2x^2+x+1}$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

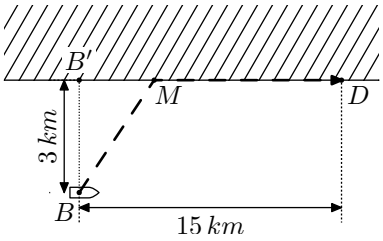
(3) Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



(a) Déterminer l'équation de la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(b) Tracer la droite (d) dans le repère ci-dessus.

E.23 Un bateau, représenté par le point B, se trouve à trois kilomètres du rivage ; le point B' représente le point du rivage le plus proche du bateau *(son projeté orthogonal)* ; le point D représente la destination à atteindre par le marin. Pour ce faire, le marin décide d'atteindre un point M de la berge, puis de rejoindre le point D en voiture.



Le bateau navigue à une vitesse de $15\,{}^{km}/_{h}$ et la voiture se déplace à une vitesse de $40\,{}^{km}/_{h}$.

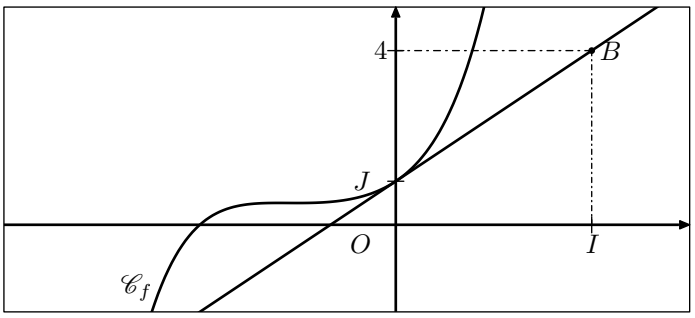
On note x la distance $B'M$:

1. Exprimer la distance BM et MD en fonction de x.
2. On note $h(x)$ le temps de parcours effectué lorsque $B'M = x$.
   a. Justifier que : $h(x) = \dfrac{1}{120}\cdot\left(8\sqrt{x^2+9}+45-3x\right)$
   b. Déterminer l'expression de la fonction dérivée h'.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction h.
3. En déduire la valeur de x pour laquelle le temps de trajet du marin est minimale, arrondie au mètre près.

E.24 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = (a\cdot x+1)\cdot\left(2x^2+x+1\right)^2$$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal donné ci-dessous, on représente la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



La droite (d) passe par les points J et $B(1\,;4)$.

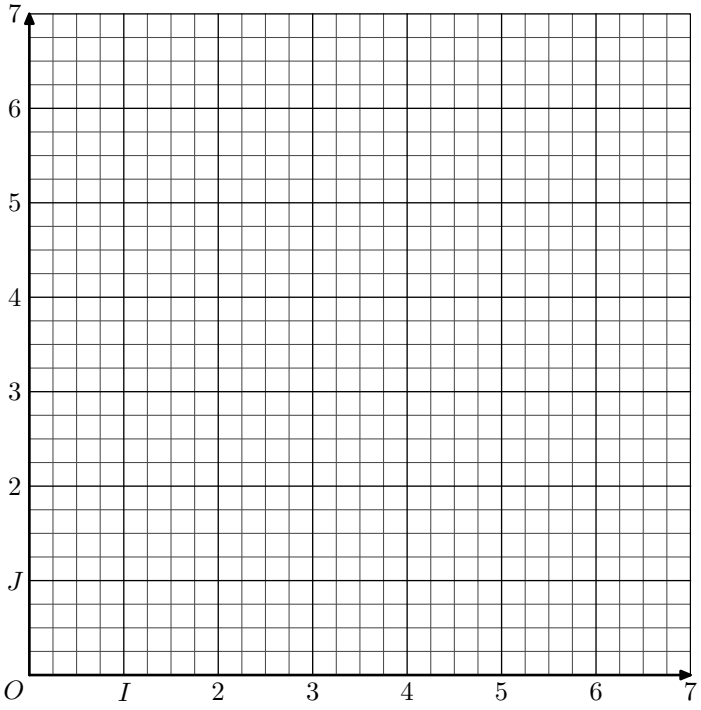
1. a. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point J.
   b. Déterminer le coefficient de la droite (JB).
   c. Démontrer que tout réel x, on a :
   $$f'(x) = \left[10ax^2+(3a+8)\cdot x+(a+2)\right]\cdot\left(2x^2+x+1\right).$$
   d. On suppose que la droite (JB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point J. Déterminer la valeur de a. Justifier votre réponse.
2. On admet que f' a pour expression :
   $$f'(x) = \left(10x^2+11x+3\right)\left(2x^2+x+1\right).$$
   Déterminer les sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

E.25 On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. L'unité graphique est $1\,cm$.

1. Étude des limites
   a. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   c. Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Étude des variations de la fonction f.
   a. Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :
   $$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot(2x+1)$$
   b. Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   c. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et donner la valeur de α arrondie au centième.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.



7. *Lien entre dérivée et nombre derivée*

E.26 Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{(3+h)^4-81}{h}$

b. $\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{\sqrt{6\cdot h+1}-1}{h}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{(x^2+1)^8-1}{x}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}-2}{x}$

E.27 Déterminer les valeurs des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{\sqrt{2h+5}-\sqrt{5}}{h}$ (b) $\lim\limits_{h\mapsto 0} \dfrac{(2-2h)^4-16}{h}$

E.28 Soit f une fonction numérique dérivable.

(1) Soit $a\in\mathcal{D}_f$. Établir la limite suivante :

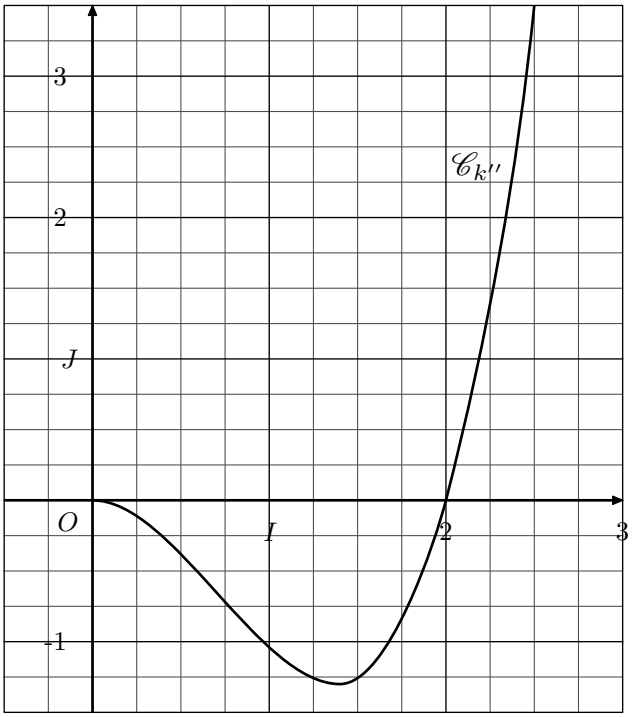
$$\lim_{\substack{x\mapsto a\\ x\neq a}} \frac{x\cdot f(a)-a\cdot f(x)}{x-a} = f(a)-a\cdot f'(a)$$

On posera : $x=a+h$.

(2) En déduire la limite : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto a\\ x\neq a}} \dfrac{x^3\cdot a-a^3\cdot x}{x-a}$

8. *Convexité : graphiquement*

E.29 On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0\,;+\infty[$.



Parmi les réponses proposées, laquelle est correcte?

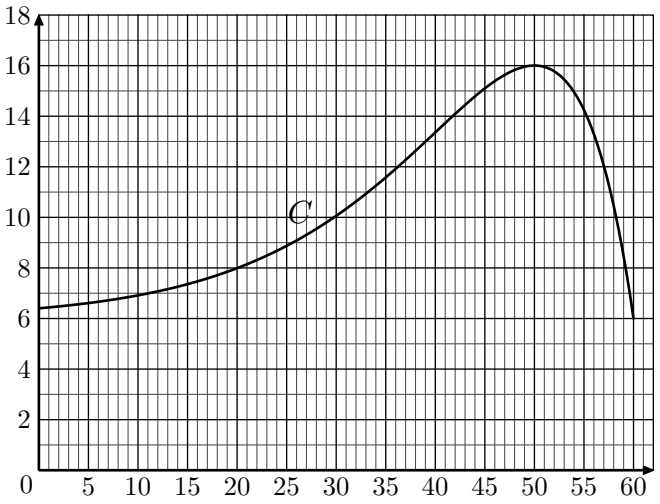
(1) k est concave sur l'intervalle $[1\,;2]$.

(2) k est convexe sur l'intervalle $[0\,,2]$.

(3) k est convexe sur $[0\,;+\infty[$.

(4) k est concave sur $[0\,;+\infty[$.

E.30 On considère une fonction P définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;60]$.
On donne, ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction P.



À partir d'une lecture graphique répondre aux questions qui suivent :

(1) En argumentant la réponse, donner le signe de $P'(54)$, où P' est la fonction dérivée de la fonction P.

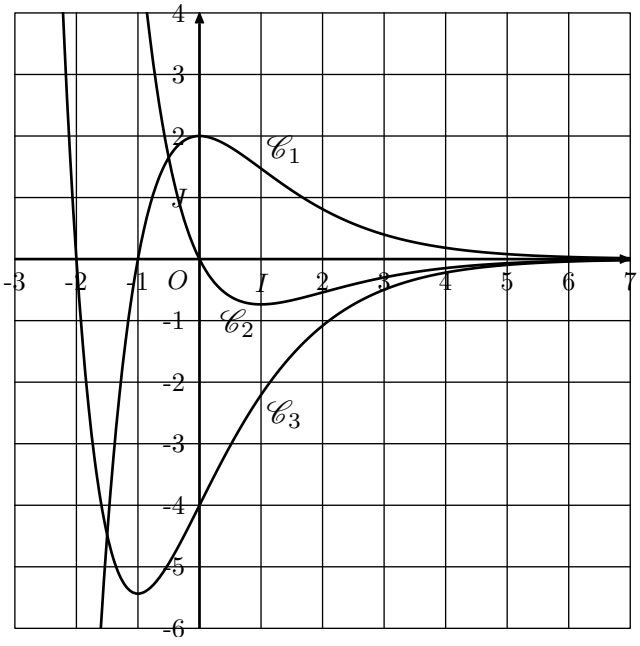
(2) Donner un intervalle sur lequel la fonction P est convexe.

(3) Donner, à l'unité près, les solutions de l'équation : $P(x)=10$.

E.31 Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ définies sur $[-3\,;7]$ ont été représentées.
L'une de ces fonctions représente une fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.

Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.



9. *Convexité : étude de fonctions*

E.32 *Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte.*

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-9\cdot x$ est convexe sur l'intervalle :

(a) $]-\infty\,;+\infty[$ (b) $[0\,;+\infty[$

(c) $]-\infty\,;0]$ (d) $[-3\,;3]$

E.33 Pour la question posée, une seule des quatre réponses est exacte.
Aucune justification n'est demandée.

La fonction f est définie pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\mathrm{e}^{2\cdot x+\ln(x)}$

(1) la fonction f est concave.

(2) la fonction f possède une fonction dérivée seconde qui s'annule.

(3) la fonction f possède une fonction dérivée seconde strictement positive.

(4) la fonction f possède une fonction dérivée qui s'annule.

E.34 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\cdot\mathrm{e}^{x^2-1}$

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.

(1) (a) Montrer que pour tout réel x :
$f'(x)=\left(2\cdot x^2+1\right)\cdot\mathrm{e}^{x^2-1}$

(b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

(2) On admet que pour tout réel x :
$f''(x)=2x\cdot\left(2\cdot x^2+3\right)\cdot\mathrm{e}^{x^2-1}$
Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

E.35 On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;4]$ par : $f(x)=(x+2)\cdot\mathrm{e}^{-x+1}$

On note f' la fonction dérivée de f.

(1) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[-2\,;4]$, on a :
$f'(x)=-(x+1)\cdot\mathrm{e}^{-x+1}$

(2) Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	factoriser(dériver[−(x+1)∗exp(−x+1)]) $x*\exp(-x+1)$
2	intégrer[(x+2)∗exp(−x+1)] $-(x+3)*\exp(-x+1)$

En utilisant ces résultats, répondre à la question suivante :

Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. Justifier.

E.36 Soit f la fonction définie sur $[0\,;8]$ par :
$f(x)=\dfrac{0{,}4}{20\cdot\mathrm{e}^{-x}+1}+0{,}4$

(1) Montrer que $f'(x)=\dfrac{8\cdot\mathrm{e}^{-x}}{\left(20\cdot\mathrm{e}^{-x}+1\right)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

(2) Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	`f'(x) :=8*e^(-x)/(20*e^(-x)+1)^2` $f'(x):=\dfrac{8\cdot\mathrm{e}^{-x}}{400\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2+40\cdot\mathrm{e}^{-x}+1}$
2	`g(x) :=Dérivée[f'(x)]` $g(x):=\dfrac{160\cdot\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2-8\cdot\mathrm{e}^{-x}}{8000\cdot\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^3+1200\cdot\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2+60\cdot\mathrm{e}^{-x}+1}$
3	`Factoriser[g(x)]` $8\cdot\mathrm{e}^{-x}.\dfrac{20\cdot\mathrm{e}^{-x}-1}{\left(20\cdot\mathrm{e}^{-x}+1\right)^3}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

10. *Convexité et positions des tangentes*

E.37 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par :

$f(x) = -x\cdot\ln(x) + 2\cdot x + 1$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;10]$.

E.38 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = 3\cdot x - 3\cdot x\cdot\ln(x)$

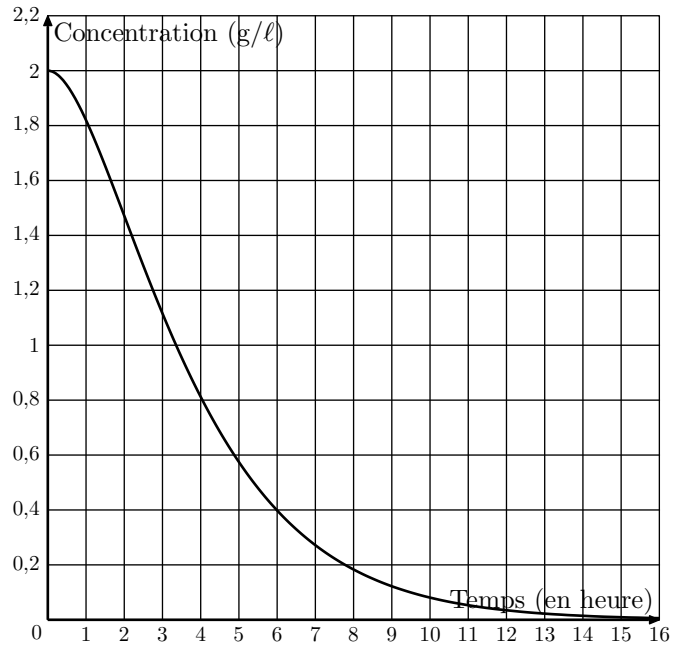
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T?

11. *Point d'inflexion : graphiquement*

E.39 On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes en litres, de ce médicament dans le sang.

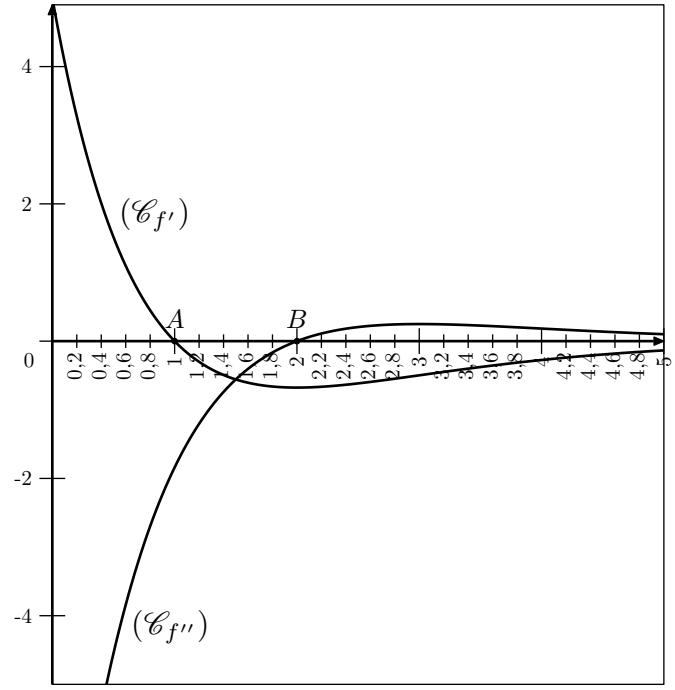
On obtient la courbe fournie ci-dessous :



En vous aidant d'une lecture graphique et sans justifier, au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle?

E.40 On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$.

On a représenté ci-dessous la courbe $\left(\mathscr{C}_{f'}\right)$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $\left(\mathscr{C}_{f''}\right)$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0\,;5]$.



Le point A de coordonnées $(1\,;0)$ appartient à $\left(\mathscr{C}_{f'}\right)$ et le point B de coordonnées $(2\,;0)$ appartient à la courbe $\left(\mathscr{C}_{f''}\right)$.

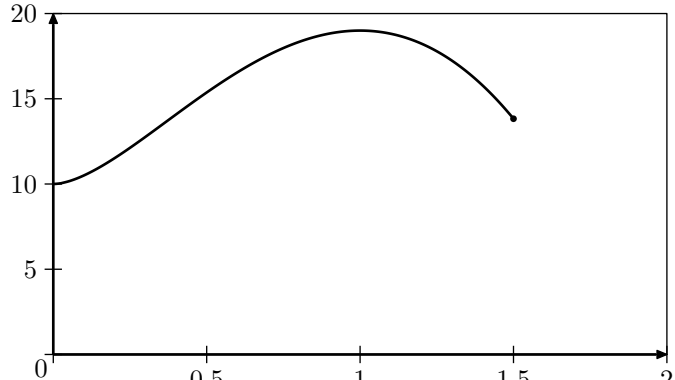
1. Déterminer le sens de variation de la fonction f. Justifier.
2. Déterminer sur quel*(s)* intervalle*(s)*, la fonction f est convexe. Justifier.
3. La courbe de f admet-elle des points d'inflexion? Justifier. Si oui, préciser leur*(s)* abscisse*(s)*.

12. *Point d'inflexion : étude de fonctions*

E.41 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;15]$ par :

$f(x) = 9\cdot x^2\cdot(1-2\cdot\ln x)+10.$

La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



On admet que $f''(x) = -36\cdot\ln x - 36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;1{,}5]$.

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1}.

E.42 La production mensuelle de légumes permettra de livrer, au maximum, 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$C(x) = -\frac{1}{48}\cdot x^4 + \frac{5}{16}\cdot x^3 + 5\cdot x + 10$$

Lorsque x est exprimé en centaines de papiers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.
On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0\,;10]$, le coût marginal est donné par la fonction $C_m = C'$ où C' est la fonction dérivée de C.

1. Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour six cents paniers vendus.
2. On note C'' la fonction dérivée seconde de C et on a :
   $C''(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{15}{8}\cdot x$
   a. Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0\,;a]$ inclus dans $[0\,;10]$ sur lequel la fonction C est convexe.
   b. Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C?
   Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

E.43 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par :

$$f(x) = (-2\cdot x + 30)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x - 3}$$

1. a. Montrer que $f'(x) = (-0{,}4\cdot x + 4)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20\,;20]$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-20\,;20]$.
   On précisera la valeur exacte du maximum de f.
2. a. Montrer que, sur l'intervalle $[-20\,;20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α.
   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,2.
3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $(-10\cdot x + 200)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x+3}$ $(-2\cdot x + 30)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$
2	Dériver $(2\cdot x + 30)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$ $(-0{,}4\cdot x + 4)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$
3	Dériver $(-0{,}4\cdot x + 4)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$ $(-0{,}08\cdot x + 0{,}4)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$

Répondre à la question suivante en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

E.44 On admet que la fonction f est définie par :

$$f(x) = (x^2 - 2\cdot x + 1)\cdot \mathrm{e}^{-2x+6}$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés :

L1	`f(x) :=(x^2-2x+1)*e^(-2x+6)` $\to f(x) = (x^2 - 2\cdot x + 1)\cdot \mathrm{e}^{-2x+6}$
L2	`f'(x) :=Dérivée[f(x)]` $\to f'(x) = (-2\cdot x^2 + 6\cdot x - 4)\cdot \mathrm{e}^{-2x+6}$
L3	`g(x) :=Dérivée[f'(x)]` $\to g(x) = -16\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-2x+6} + 4\cdot x^2\cdot \mathrm{e}^{-2x+6} + 14\cdot \mathrm{e}^{-2x+6}$
L4	`Factoriser[g(x)]` $\to 2\cdot \mathrm{e}^{-2x+6}\cdot(2\cdot x^2 - 8\cdot x + 7)$
L5	`Résoudre[g(x)=0]` $\to \left\{x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2}\,;\ x = \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$
L6	`F(x) :=Primitive[f(x)]` $\to F(x) = \frac{1}{4}\cdot(-2\cdot x^2 + 2\cdot x - 1)\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot x+6}$

1. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.
2. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion?
   Si oui, en donner l'abscisse.

E.45 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{0{,}5 + 100\cdot \mathrm{e}^{-x}}$$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;10]$.

1. Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $[0\,;10]$, on a : $f'(x) = \dfrac{100\cdot \mathrm{e}^{-x}}{(0{,}5 + 100\cdot \mathrm{e}^{-x})^2}$

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[0\,;10]$. Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$: $f''(x) = \dfrac{100\cdot \mathrm{e}^{-x}\cdot(100\cdot \mathrm{e}^{-x} - 0{,}5)}{(0{,}5 + 100\cdot \mathrm{e}^{-x})^3}$

2. a. Montrer que, dans l'intervalle $[0\,;10]$, l'inéquation $100\cdot \mathrm{e}^{-x} - 0{,}5 \geqslant 0$ est équivalente à l'inéquation : $x \leqslant -\ln(0{,}005)$.
   b. En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $[0\,;10]$.
3. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère.
   Montrer, à l'aide de la question 2, que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.
4. En utilisant les résultats de la question 2, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

13. *Exercices non-classés*

E.46 On considère la fonction :
$f : x \mapsto \sqrt{-2{\cdot}x^2 + 7{\cdot}x - 3}$

1. Montrer l'égalité suivante :

   $(2{\cdot}x - 1)(3 - x) = -2{\cdot}x^2 + 7{\cdot}x - 3$

2. a. Étudier le signe de $-2{\cdot}x^2+7{\cdot}x-3$ en fonction de la valeur de x.

   b. En déduire l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f.

3. Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

E.47 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$

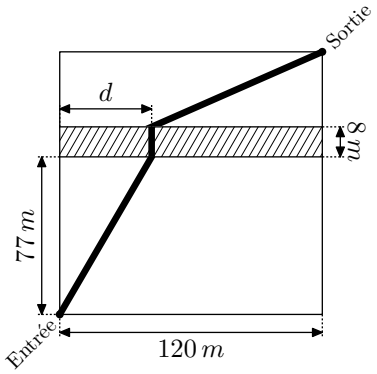
1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=x$. On note a l'unique solution de cette équation.

3. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;a]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;a]$.

E.48

La ville "*Promenade*" souhaite emménager un terrain de forme carré traversé par une rivière traversant latéralement le terrain.
La figure ci-dessous représente le terrain et la rivière est la partie hachurée :



À quelle distance d doit-on placer le pont pour que la distance parcourue par un visiteur soit minimale?

E.49 On considère un segment $[AB]$ de longueur 10 centimètres et un point M de ce segment, différent de A et B. Les points N et P sont tels que $AMNP$ est un carré.

L'objectif de l'exercice est de déterminer le point M du segment $[AB]$ pour lequel la distance BN est minimale.

Les distances sont exprimées en centimètres.

1. On pose : $AM = x$.

   a. Faire une figure.

   b. Déterminer l'intervalle des valeurs possibles pour x.

   c. Déterminer en fonction de x la distance BM.

   d. Déterminer en fonction de x la distance BN.
   (On rappelle le théorème de Pythagore : dans un triangle ABC rectangle en A, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$)

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par : $f(x) = \sqrt{2{\cdot}x^2 - 20{\cdot}x + 100}$

   La fonction dérivée f' de f est définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par : $f'(x) = \dfrac{2x - 10}{\sqrt{2{\cdot}x^2 - 20{\cdot}x + 100}}$.

   a. Répondre aux questions suivantes

      i. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$

      ii. Montrer que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle $[0\,;10]$ que l'on précisera.

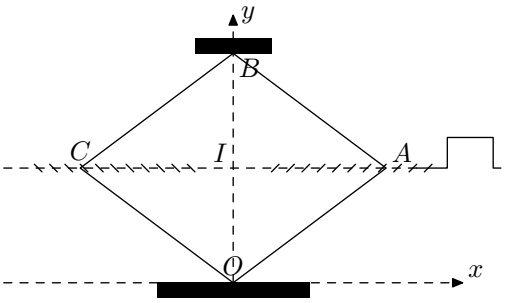
   b. Répondre aux questions suivantes :

      i. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité un centimètre.

      ii. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=8$. On fera apparaître les traits de construction utiles et on donnera des valeurs approchées des solutions lues.

3. En utilisant les résultats précédents, déterminer le point M du segment $[AB]$ pour lequel la distance BN est minimale.

E.50 La figure ci-dessous est le schéma d'un cric de voiture.



Celui-ci est constitué d'un losange déformable $OABC$, le point O étant le point d'appui sur le sol et le point B étant le point par lequel la voiture est soulevé.

Lorsqu'on tourne la manivelle M, les écrous A et C se rapprochent *(ou s'éloigne)*, ce qui fait monter *(ou descendre)* l'appui B, selon l'axe (Oy).

On donne : $OA = OC = AB = BC = 25\,cm$

Dans le repère orthonormé $(O\ ;\ x\ ;\ y)$ d'unité un centimètre, x_A désigne l'abscisse du point A et varie de 0 à 25.
L'ordonnée du point B est notée y_B :

- Pour $x_A = 0$, on a : $y_B = 50$;
- Pour $x_A = 25$ on a : $y_B = 0$.

Pour le cric fonctionne correctement, il faut :
$x_A > 6$; $y_B > 10$.

1 a En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle AIB, trouver une relation entre x_A et y_B et vérifier que : $y_B = 2\cdot\sqrt{625 - x_A^2}$.

b En utilisant la relation trouvée à la question a, calculer la valeur de x_A lorsque y_B est égal à 10, puis la valeur de y_B lorsque x_A est égal à 6.

2 On considère la fonction f définie pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;25]$ par : $f(x) = 2\cdot\sqrt{625 - x^2}$.

On admettra qu'une fonction de type $\sqrt{u}$, où u est une fonction définie et positive sur un intervalle, a le même sens de variation que u sur cet intervalle.

a Déterminer la dérivée u' de la fonction u définie sur l'intervalle $[0\,;25]$ par $u(x) = 625 - x^2$. Étudier le signe de $u'(x)$ quand x varie entre 0 et 25.
En déduire le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\,;25]$.

b En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera les valeurs de la fonction aux bornes de l'intervalle.

c Tracer la courbe (Γ) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique $0{,}5\,cm$. *(On précisera sur la courbe les points d'abscisses 18, 20, 22 et 24.)*

3 a Quand l'abscisse x_A passe de 24 à 22, calculer l'augmentation q_1 de la hauteur y_B arrondie au dixième près.
Vérifier la cohérence de ce résultat sur la courbe (Γ) en faisant apparaître les constructions effectuées.

b Évaluer, à l'aide du graphique en faisant apparaître les traits de constructions utiles, l'augmentation q_2 de y_b lorsque x_A passe de 22 à 20, puis l'augmentation q_2 de y_B lorsque x_A passe de 20 à 18.

c Lorsqu'on actionne la manivelle de façon régulière, peut-on dire que la voiture monte à une vitesse constante? Justifier votre réponse.

E.51 Le tableau présente pour chaque ligne une fonction et l'expression de la dérivée. Établir l'exactitude de chaque ligne.

Fonction	Image de x	Nombre dérivé en x
f	$(3x+2)^6$	$18\cdot(3x+2)^5$
g	$4\cdot(3-2x)^4$	$-32\cdot(3-2x)^3$
h	$\dfrac{1}{-2x^2+3x+1}$	$\dfrac{4x-3}{\left(2x^2-3x-1\right)^2}$
j	$\sqrt{5x^2+6x-2}$	$\dfrac{5x+3}{\sqrt{5x^2+6x-2}}$
k	$\dfrac{2x-1}{\sqrt{3-x}}$	$\dfrac{2x-11}{2\cdot(x-3)\cdot\sqrt{3-x}}$