Terminale Spécialité / Compléments sur la dérivation et convexité

1. Dérivées de fonctions composées

E.1 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \left(3{\cdot}x+5\right)^5$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{3{\cdot}x^4+1}$

(c) $h(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ (d) $j(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

E.2 On considère la fonction f définie par :
$f\colon x \longmapsto \sqrt{-2x^2-x+6}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

E.3 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]$ par la relation par la relation suivante :
$$f(x) = \sqrt{2x^2-3x-2}$$
Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en -1.

E.4 Déterminer l'expression, sous forme simplifiée, de la fonction f' dérivée de la fonction f définie par :
$$f(x) = \left(\sqrt{x}+1\right)^3$$

E.5 Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner l'expression simplifiée de leur fonction dérivée :

(a) $f(x) = \left(3x^2-2x+1\right)\sqrt{x}$ (b) $g(x) = (2x+1){\cdot}\sqrt{3-x}$

2. Dérivées de fonctions composées de la fonction exponentielle

E.6 Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

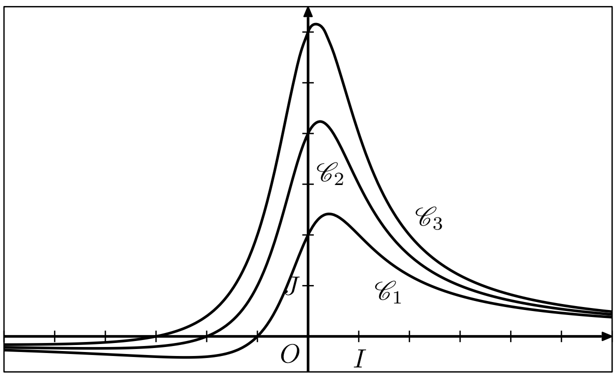
(a) $f(x) = \mathrm{e}^{2-x^2}$ (b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$ (c) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+x+1}$

E.7 Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

(a) $f(x) = \left(2{\cdot}x+1\right)\mathrm{e}^{x+1}$ (b) $f(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{3\cdot x^2}$

3. Dérivées de familles de fonctions

E.8 On considère pour tout entier naturel n non-nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f_n(x) = \frac{2{\cdot}\left(x+n\right)}{1+x^2}$$
Dans ~~un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe~~ représentative de la fonction f_n.



1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f_n'.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d_n) à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 1.
3. (a) Établir l'égalité suivante :
$$n{\cdot}x^3-\left(2{\cdot}n+1\right){\cdot}x^2+\left(n+2\right){\cdot}x-1 = \left(x-1\right)^2{\cdot}\left(n{\cdot}x-1\right)$$
   (b) Étudier la position relative de la droite $\left(d_n\right)$ et de la courbe $\mathscr{C}_n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

4. Tangente de fonctions composées

E.9 On considère la fonction g définie par la relation :
$$g(x) = \sqrt{x^2-2x+3}$$
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

② Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

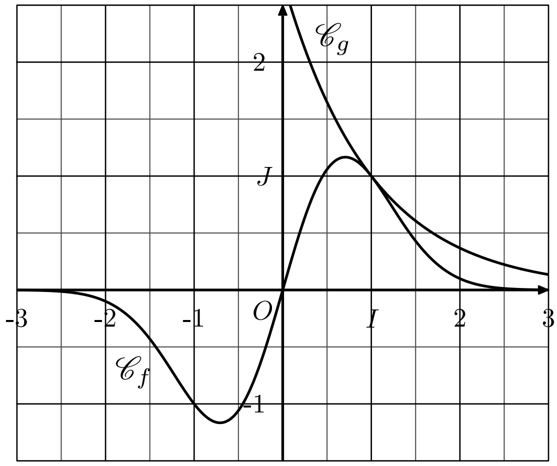
E.10 On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$

et la fonction g définie pour tout réel x par :

$g(x) = e^{1-x}$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Justifier qu'au point d'abscisse 1, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent la même tangente.

5. *Tableau de variations d'une fonction composée*

E.11 On considère la fonction f définie par la relation :

$f(x) = \sqrt{6x^2 + 13x - 5}$

① Justifier que la fonction f admet pour ensemble de définition la partie I de $\mathbb{R}$ définie par :

$I = \left]-\infty\,;-\dfrac{5}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

② Déterminer le sens de variation de la fonction f sur son ensemble de définition I.

6. *Etude de la fonction dérivée de fonctions composées*

E.12 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$f(x) = (5x^2 + 3x + 2)^5$

① Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

② Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

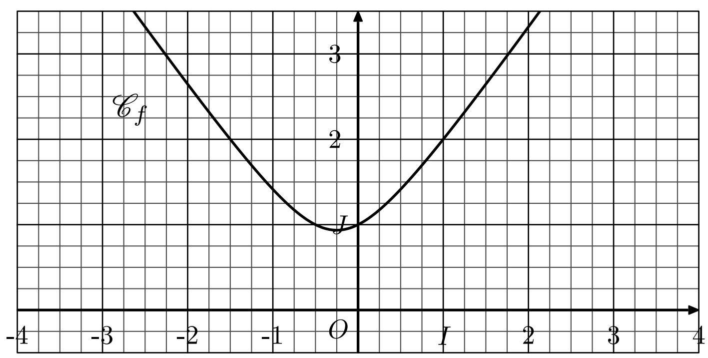
E.13 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$

① Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

② Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

③ Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



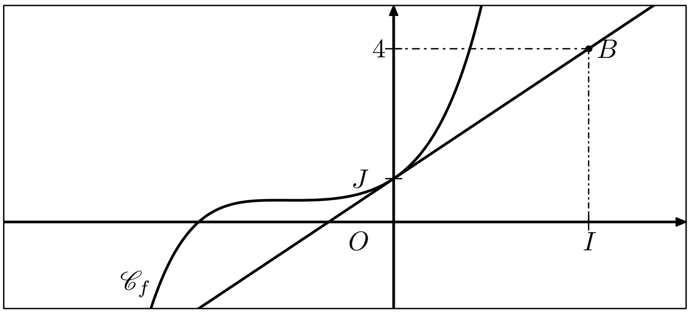
ⓐ Déterminer l'équation de la tangente (d) à la courbe

$\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(b) Tracer la droite (d) dans le repère ci-dessus.

E.14 On considère la fonction f définie par la relation :
$$f(x) = (a{\cdot}x+1){\cdot}\left(2x^2+x+1\right)^2$$

Dans un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthogonal donné ci-dessous, on représente la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



La droite (d) passe par les points J et $B(1\,;4)$.

1. (a) Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point J.

   (b) Déterminer le coefficient de la droite (JB).

   (c) Démontrer que tout réel x, on a :
   $$f'(x) = \left[10ax^2+(3a+8){\cdot}x+(a+2)\right]{\cdot}\left(2x^2+x+1\right).$$

   (d) On suppose que la droite (JB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point J. Déterminer la valeur de a. Justifier votre réponse.

2. On admet que f' a pour expression :
   $$f'(x) = \left(10x^2+11x+3\right)\left(2x^2+x+1\right).$$
   Déterminer les sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

7. Lien entre dérivée et nombre derivée

E.15 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{(3+h)^4-81}{h}$ (b) $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{\sqrt{6{\cdot}h+1}-1}{h}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0}\frac{\left(x^2+1\right)^8-1}{x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0}\frac{\sqrt{x^2+x+4}-2}{x}$

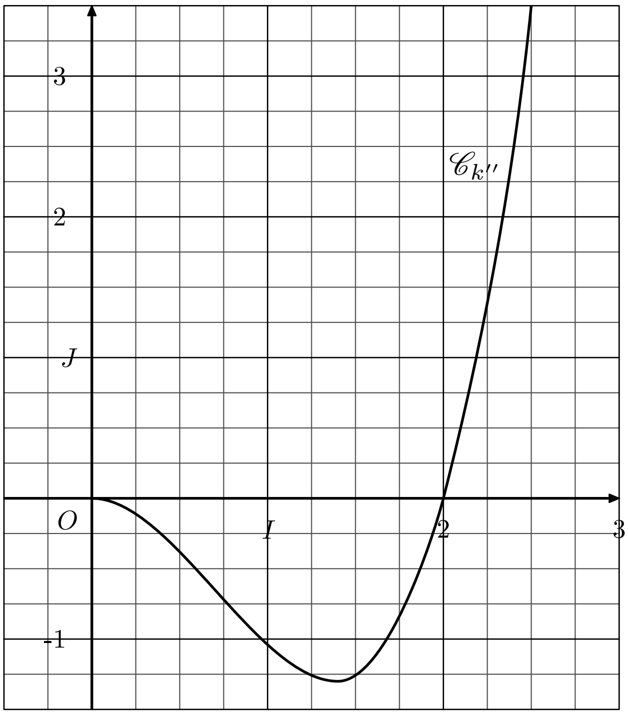
E.16 Soit f une fonction numérique dérivable.

1. Soit $a\in\mathcal{D}_f$. Établir la limite suivante :
   $$\lim_{\substack{x\mapsto a\\ x\neq a}}\frac{x{\cdot}f(a)-a{\cdot}f(x)}{x-a} = f(a)-a{\cdot}f'(a)$$
   On posera : $x=a+h$.

2. En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto a\\ x\neq a}}\frac{x^3{\cdot}a-a^3{\cdot}x}{x-a}$

8. Convexité : graphiquement

E.17 On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$.



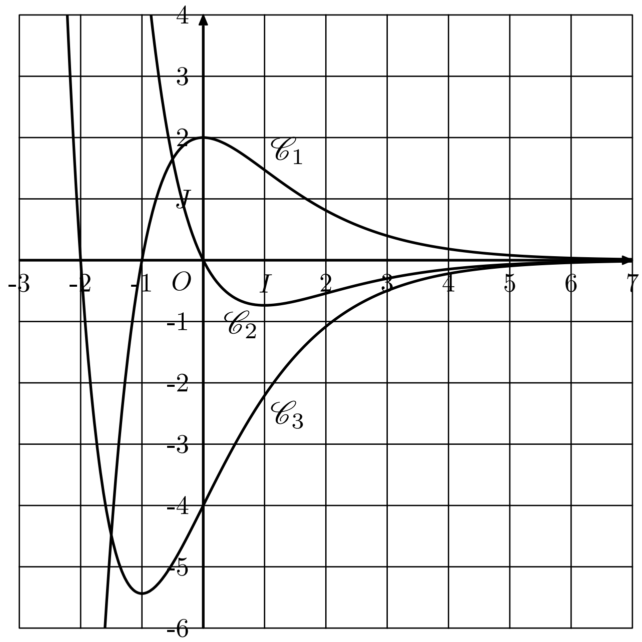
Parmi les réponses proposées, laquelle est correcte?

1. k est concave sur l'intervalle $\left[1\,;2\right]$.
2. k est convexe sur l'intervalle $\left[0\,,2\right]$.
3. k est convexe sur $\left[0\,;+\infty\right[$.
4. k est concave sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

E.18 Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ définies sur $[-3\,;7]$ ont été représentées.
L'une de ces fonctions représente une fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.

Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.



9. *Convexité : étude de fonctions*

E.19 *Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte.*

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-9\cdot x$ est convexe sur l'intervalle :

(a) $]-\infty\,;+\infty[$ (b) $[0\,;+\infty[$

(c) $]-\infty\,;0]$ (d) $[-3\,;3]$

E.20 On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;4]$ par : $f(x)=(x+2)\cdot e^{-x+1}$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[-2\,;4]$, on a : $f'(x)=-(x+1)\cdot e^{-x+1}$
2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	factoriser(dériver[$-(x+1)*\exp(-x+1)$]) $x*\exp(-x+1)$
2	intégrer[$(x+2)*\exp(-x+1)$] $-(x+3)*\exp(-x+1)$

En utilisant ces résultats, répondre à la question suivante :

Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. Justifier.

E.21 Soit f la fonction définie sur $[0\,;8]$ par :

$$f(x)=\frac{0{,}4}{20\cdot e^{-x}+1}+0{,}4$$

1. Montrer que $f'(x)=\dfrac{8\cdot e^{-x}}{(20\cdot e^{-x}+1)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	`f'(x):=8*e^(-x)/(20*e^(-x)+1)^2` $f'(x):=\dfrac{8\cdot e^{-x}}{400\left(e^{-x}\right)^2+40\cdot e^{-x}+1}$
2	`g(x):=Dérivée[f'(x)]` $g(x):=\dfrac{160\cdot\left(e^{-x}\right)^2-8\cdot e^{-x}}{8000\cdot\left(e^{-x}\right)^3+1200\cdot\left(e^{-x}\right)^2+60\cdot e^{-x}+1}$
3	`Factoriser[g(x)]` $8\cdot e^{-x}\cdot\dfrac{20\cdot e^{-x}-1}{\left(20\cdot e^{-x}+1\right)^3}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

10. *Convexité et positions des tangentes*

E.22 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par :

$f(x)=-x\cdot\ln(x)+2\cdot x+1$

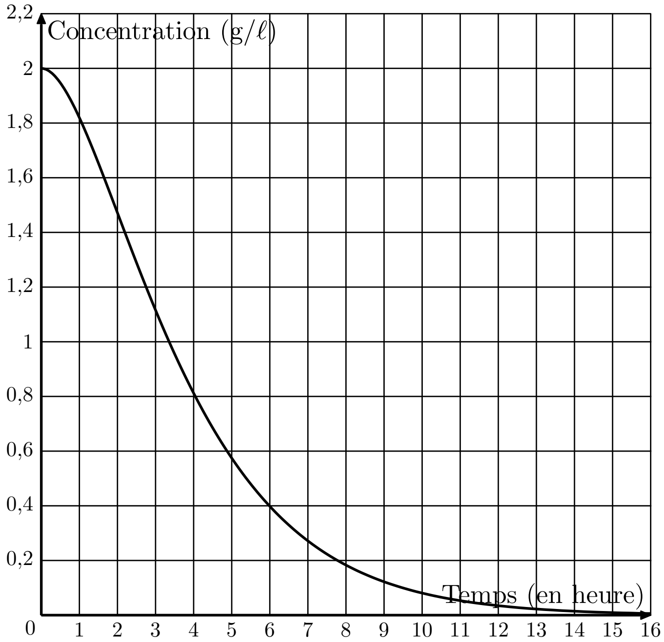
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;10]$.

11. *Point d'inflexion : graphiquement*

E.23 On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes en litres, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie ci-dessous :



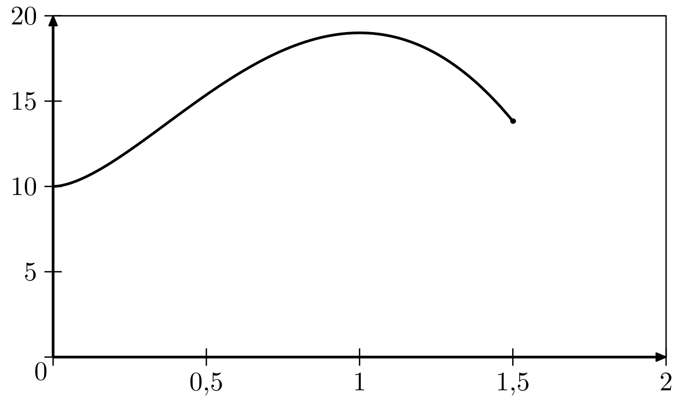
En vous aidant d'une lecture graphique et sans justifier, au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle?

12. *Point d'inflexion : étude de fonctions*

E.24 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;15]$ par :

$f(x)=9\cdot x^2\cdot(1-2\cdot\ln x)+10$.

La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



On admet que $f''(x)=-36\cdot\ln x-36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;1{,}5]$.

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1}.

E.25 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par :

$f(x)=(-2\cdot x+30)\cdot\mathrm{e}^{0,2\cdot x-3}$

1. a. Montrer que $f'(x)=(-0{,}4\cdot x+4)\cdot\mathrm{e}^{0,2\cdot x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20\,;20]$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-20\,;20]$.
   On précisera la valeur exacte du maximum de f.

2. a. Montrer que, sur l'intervalle $[-20\,;20]$, l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,2.

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $(-10\cdot x+200)\cdot\mathrm{e}^{0,2\cdot x+3}$ $(-2\cdot x+30)\cdot\mathrm{e}^{0,2\cdot x-3}$
2	Dériver $(2\cdot x+30)\cdot\mathrm{e}^{0,2\cdot x-3}$ $(-0{,}4\cdot x+4)\cdot\mathrm{e}^{0,2\cdot x-3}$
3	Dériver $(-0{,}4\cdot x+4)\cdot\mathrm{e}^{0,2\cdot x-3}$ $(-0{,}08\cdot x+0{,}4)\cdot\mathrm{e}^{0,2\cdot x-3}$

Répondre à la question suivante en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

E.26 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\big[0\,;10\big]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{0{,}5+100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}}$$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $\big[0\,;10\big]$.

(1) Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $\big[0\,;10\big]$, on a : $f'(x)=\dfrac{100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}}{\big(0{,}5+100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}\big)^2}$

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $\big[0\,;10\big]$. Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$: $f''(x)=\dfrac{100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}{\cdot}\big(100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}-0{,}5\big)}{\big(0{,}5+100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}\big)^3}$

(2) (a) Montrer que, dans l'intervalle $\big[0\,;10\big]$, l'inéquation $100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}-0{,}5\geqslant 0$ est équivalente à l'inéquation : $x\leqslant -\ln\big(0{,}005\big)$.

(b) En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $\big[0\,;10\big]$.

(3) On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère.
Montrer, à l'aide de la question (2), que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.

(4) En utilisant les résultats de la question (2), déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

13. *Exercices non-classés*

E.27 On considère la fonction :

$$f\,:\;x\mapsto\sqrt{-2{\cdot}x^2+7{\cdot}x-3}$$

(1) Montrer l'égalité suivante :

$$(2{\cdot}x-1)(3-x)=-2{\cdot}x^2+7{\cdot}x-3$$

(2) (a) Étudier le signe de $-2{\cdot}x^2+7{\cdot}x-3$ en fonction de la valeur de x.

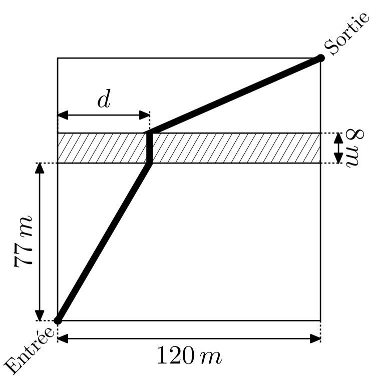
(b) En déduire l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f.

(3) Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

(4) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

E.28

La ville "*Promenade*" souhaite emménager un terrain de forme carré traversé par une rivière traversant latéralement le terrain.
La figure ci-dessous représente le terrain et la rivière est la partie hachurée :



À quelle distance d doit-on placer le pont pour que la distance parcourue par un visiteur soit minimale?

E.29 On considère un segment $[AB]$ de longueur 10 centimètres et un point M de ce segment, différent de A et B. Les points N et P sont tels que $AMNP$ est un carré.

L'objectif de l'exercice est de déterminer le point M du segment $[AB]$ pour lequel la distance BN est minimale.

Les distances sont exprimées en centimètres.

(1) On pose : $AM=x$.

(a) Faire une figure.

(b) Déterminer l'intervalle des valeurs possibles pour x.

(c) Déterminer en fonction de x la distance BM.

(d) Déterminer en fonction de x la distance BN.
(On rappelle le théorème de Pythagore : dans un triangle ABC rectangle en A, on a $BC^2=AB^2+AC^2$)

(2) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par : $f(x)=\sqrt{2{\cdot}x^2-20{\cdot}x+100}$

La fonction dérivée f' de f est définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par : $f'(x)=\dfrac{2x-10}{\sqrt{2{\cdot}x^2-20{\cdot}x+100}}$.

(a) Répondre aux questions suivantes

(i) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\big[0\,;10\big]$

(ii) Montrer que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle $[0\,;10]$ que l'on précisera.

(b) Répondre aux questions suivantes :

(i) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité un centimètre.

(ii) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=8$. On fera apparaître les traits de construction utiles et on donnera des valeurs approchées des solutions lues.

(3) En utilisant les résultats précédents, déterminer le point M du segment $[AB]$ pour lequel la distance BN est minimale.

E.30 Le tableau présente pour chaque ligne une fonction et l'expression de la dérivée. Établir l'exactitude de chaque ligne.

Fonction	Image de x	Nombre dérivé en x
f	$(3x+2)^6$	$18{\cdot}(3x+2)^5$
g	$4{\cdot}(3-2x)^4$	$-32{\cdot}(3-2x)^3$
h	$\dfrac{1}{-2x^2+3x+1}$	$\dfrac{4x-3}{\big(2x^2-3x-1\big)^2}$
j	$\sqrt{5x^2+6x-2}$	$\dfrac{5x+3}{\sqrt{5x^2+6x-2}}$
k	$\dfrac{2x-1}{\sqrt{3-x}}$	$\dfrac{2x-11}{2{\cdot}(x-3){\cdot}\sqrt{3-x}}$

