Terminale Spécialité / Représentation, équation cartésienne

1. Résolution de systèmes

E.1 Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

(On montrera que ce système admet un unique triplet solution).

E.2 Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ -x + 5y - 9z = -5 \end{cases}$$

(On montrera que ce système n'admet aucune solution)

E.3 Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x - y + 4z = -2 \\ 5x - y + 7z = 1 \end{cases}$$

(On montrera que ce système admet une infinité de solution qu'on écrira sous la forme $(\dots;\dots;z)$ où $z\in\mathbb{R}$)

2. Représentations paramétriques d'une droite

E.4 Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point A et admettant le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur dans chaque cas ci-dessous :

a. $A\,(3\,;0\,;-2)$; $\overrightarrow{u}\,(-1\,;-2\,;1)$

b. $A\,(2\,;-1\,;1)$; $\overrightarrow{u}\,(2\,;0\,;-4)$

E.5 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$.

On considère le point A de coordonnées $(-2\,;8\,;4)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1\,;5\,;-1)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

E.6 *Indiquer pour la proposition suivante si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.*

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$.

La droite de l'espace passant par le point B de coordonnées $(2\,;3\,;4)$ et admettant le vecteur $\overrightarrow{u}\,(1\,;2\,;3)$ comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t + 1 \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

3. Représentations paramétriques de droites et positions relatives

E.7 On considère l'espace muni d'un repère $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ et la droite (d) admettant la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad , t\in\mathbb{R}$$

1. a. Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}\,;4\,;-\frac{5}{2}\right)$ appartient à la droite (d).

   b. Montrer que le point $B\left(-\frac{9}{4}\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{23}{4}\right)$ n'appartient pas à la droite (d).

2. On considère la droite (d') admettant la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{3}{2}\cdot t \\ y = 3 - 3t \\ z = -4 - \frac{9}{2}\cdot t \end{cases} \quad , \text{où } t\in\mathbb{R}$$

   a. Montrer que le point A appartient à la droite (d').

   b. Quelle est la position relative des droites (d) et (d')?

E.8 On considère l'espace muni d'un repère $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour représentations paramétriques :

$$(d) : \begin{cases} x = 3 + 2\cdot t \\ y = -1 - 2\cdot t \\ z = 2 + 6\cdot t \end{cases} \quad (d') : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = -1 + t \\ z = -3\cdot t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

1. Montrer que les droites (d) et (d') sont parallèles.

2. Montrer que les droites (d) et (d') sont parallèles-strictes?
   (on montrera qu'un point de (d) n'appartient pas à (d'))

E.9 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$. Soit A le point de coordonnée $(3\,;1\,;3)$.

On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1\,;2\,;-1)$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

Dire laquelle des trois affirmations suivantes est exacte. Aucune justification n'est demandée :

1. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et parallèles ;
2. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et sécantes ;
3. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont non coplanaires.

E.10 On considère les deux droites (d) et (d') dont les représentations paramétriques sont respectivement :

$$\begin{cases} x = 2+4\cdot t \\ y = 1-2\cdot t \\ z = -3+t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 5-2\cdot k \\ y = -1+k \\ z = 2-\dfrac{1}{2}\cdot k \end{cases} \quad \text{où } k\in\mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d) et (d') sont coplanaires.

4. Représentations paramétriques d'une droite et résolution de systèmes

E.11 On considère l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour représentation paramétrique :

$$(d) : \begin{cases} x = -t \\ y = -1-t \; ; t\in\mathbb{R} \\ z = 5+3t \end{cases} \qquad (d') : \begin{cases} x = 4+t \\ y = 3+t \; ; t\in\mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$$

Montrer que les droites (d) et (d') sont coplanaires et sécantes. On précisera les coordonnées du point d'intersection.

E.12 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$, on considère les deux droites (d) et (d') admettant pour représentations paramétriques :

$$(d) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+3t \; ,t\in\mathbb{R} \\ z = -t \end{cases} \qquad (d') : \begin{cases} x = 2+t \\ y = -6-2t \; ,t\in\mathbb{R} \\ z = 3+t \end{cases}$$

Montrer que les droites (d) et (d') sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

E.13 On considère l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour représentation paramétrique :

$$(d) : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \; \text{ où } t\in\mathbb{R} \\ z = 2+t \end{cases} \qquad (d') : \begin{cases} x = -2-t \\ y = -1-t \; \text{ où } t\in\mathbb{R} \\ z = -1+t \end{cases}$$

Justifier que ces deux droites sont non coplanaires.

E.14 On considère les deux droites de représentation paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -3+2t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 7+2u \\ y = 2+2u \\ z = -6-u \end{cases} \quad \text{où } u\in\mathbb{R}$$

Montrer que ces deux droites sont sécantes. Donner les coordonnées du point d'intersection.

E.15 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$.

On considère les droites (d) et (d') admettant respectivement les représentations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 1+2\cdot t \\ y = -2-3\cdot t \\ z = -1-t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 2-k \\ y = 1+2\cdot k \\ z = k \end{cases} \quad \text{où } k\in\mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

E.16 On considère les droites (Δ) et (Δ') dont les représentations paramétriques sont respectivement :

$$\begin{cases} x = 3+2\cdot t \\ y = -3-t \\ z = 6+3\cdot t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = -1-k \\ y = 2+2\cdot k \\ z = 1-k \end{cases} \quad \text{où } k\in\mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (Δ) et (Δ') sont coplanaires.

5. Représentations paramétriques de droites et orthogonalités

E.17 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé, on considère le deux droites (d) et (d') définies par leur représentation paramétrique :

$$(d) \begin{cases} x = -3+2t \\ y = -4+3t \; \text{ où } t\in\mathbb{R} \\ z = 3-t \end{cases} \qquad (d') \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3-2t \; \text{ où } t\in\mathbb{R} \\ z = -2t \end{cases}$$

1. Montrer que les droites (d) et (d') sont orthogonales entre elles.
2. Les droites (d) et (d') sont-elles sécantes ? Si oui, préciser le point d'intersection.

E.18 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé, on considère deux droites (d) et (d') admettant pour représentation paramétrique :

$$(d)\ \begin{cases} x=-3+2\cdot t \\ y=\quad -\ t \\ z=-1+\ t \end{cases} t\in\mathbb{R} \quad ; \quad (d')\ \begin{cases} x=-1-2\cdot t \\ y=\quad 1+3\cdot t \\ z=\quad -\ t \end{cases} t\in\mathbb{R}$$

1. Montrer que les droites (d) et (d') sont sécantes. On déterminera les coordonnées de leur point M d'intersection.
2. a. On considère les deux vecteurs $\vec{u}\,(2\,;-1\,;1)$ et $\vec{v}\,(-2\,;3\,;-1)$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ qui soit orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   b. En déduire une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point M et orthogonale aux deux droites (d) et (d').

E.19 On considère l'espace muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\,;K\right)$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour équation paramétrique :

$$(d)\ \begin{cases} x=\ \ 3+t \\ y=-5+t \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \\ z=\ \ 4 \end{cases} \quad ; \quad (d')\ \begin{cases} x=\ \ 2+2\cdot t \\ y=\ \ 3+\ t \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \\ z=-2-\ t \end{cases}$$

1. Montrer que les droites (d) et (d') sont noncoplanaires.
2. On suppose l'existence d'une droite (Δ) perpendiculaire à la droite (d) et perpendiculaire à la droite (d')

   a. Justifier l'existence d'un réel t tel que la droite (Δ) admette pour représentation paramétrique :
   $$\begin{cases} x=\ \ 3+t+t' \\ y=-5+t-t' \quad \text{où } t'\in\mathbb{R} \\ z=\quad\ \ 4+t' \end{cases}$$

   b. En déduire une équation paramétrique de la droite (Δ).

E.20 L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On note $\mathcal{D}$ la droite des abscisses et $\mathcal{D}'$, la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=\quad -\ t \\ y=3+3t \\ z=1-\ t \end{cases}$$

1. Justifier que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.
2. On considère la droite Δ perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Prouver qu'il existe deux réelles b et c tels que le vecteur $\vec{w}=b\cdot\vec{j}+c\cdot\vec{k}$ soit un vecteur directeur de Δ.

6. *Représentations paramétriques d'un plan*

E.21 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les trois points :

$A\,(2\,;0\,;-1)\quad;\quad B\,(1\,;0\,;3)\quad;\quad C\,(2\,;1\,;1)$

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. En choisissant $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ comme couple de vecteurs directeurs, montrer que le plan (ABC) admet pour représentation paramétrique le système suivant :
   $$\begin{cases} x=-t\qquad\ \ +2 \\ y=\qquad\ t' \qquad\qquad \text{où } t\in\mathbb{R},\ t'\in\mathbb{R} \\ z=4t+2t'-1 \end{cases}$$
3. Justifier que le point $D\,(1\,;-2\,;-1)$ appartient au plan (ABC).

E.22 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les trois points :

$A\,(3\,;-1\,;2)\quad;\quad B\,(3\,;1\,;1)\quad;\quad C\,(2\,;-1\,;1)$

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).

E.23 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les trois points :

$A\big(2\,;0\,;-1\big)\quad;\quad B\big(1\,;2\,;2\big)\quad;\quad C\big(-1\,;1\,;-2\big)$

1. a. Les points A, B, C déterminent-ils un plan? Justifier votre réponse.

   b. Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC)
2. a. On considère le point $D\,(0\,;3\,;1)$. Le point D appartient-il au plan (ABC)? Justifier votre réponse.

   b. On considère le point $E\,(7\,;0\,;4)$. Le point E appartient-il au plan (ABC)? Justifier votre réponse.

7. *Coplanéarité*

E.24

1. On considère les trois vecteurs :
   $\vec{u}\,(1\,;-1\,;2)\quad;\quad\vec{v}\,(1\,;1\,;3)\quad;\quad\vec{w}\,(-1\,;-9\,;-7)$

   Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.
2. On considère les trois vecteurs :
   $\vec{u}\,(2\,;-2\,;1)\quad;\quad\vec{v}\,(1\,;4\,;-2)\quad;\quad\vec{w}\,(1\,;-16\,;6)$

   Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

E.25 On considère l'espace muni d'un repère. Dans chacun des cas et sans justification, donner la relation $\vec{w}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}$ justifiant la coplanéarité des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

1. $\vec{u}\,(3\,;2\,;0)\quad;\quad\vec{v}\,(1\,;0\,;1)\quad;\quad\vec{w}\,(7\,;6\,;-2)$
2. $\vec{u}\,(1\,;0\,;-1)\quad;\quad\vec{v}\,(3\,;-1\,;2)\quad;\quad\vec{w}\,(1\,;-1\,;4)$

E.26 Au fil de cet exercice, nous considérons les deux systèmes suivants de trois équations à trois inconnues :

$$(S) : \begin{cases} 5a - 2b \; 3 \; 11c = 0 \\ -a + 3b + 2c = 0 \\ -a + b - c = 0 \end{cases}$$

$$(T) : \begin{cases} -2a + b - 5c = 0 \\ a - 3b - 5c = 0 \\ 5a - 2b + 14c = 0 \end{cases}$$

On se place dans un repère $(O\,;I\,;J\,;K)$ pour étudier la coplanarité de vecteurs dans l'espace :

1. a. Montrer que le système $\big(S\big)$ n'admet que le triplet $\big(0\,;\,0\,;\,0\big)$ pour solution.

   b. En déduire que les vecteurs :
   $\overrightarrow{p}\big(5\,;\,-1\,;\,-1\big)$; $\overrightarrow{q}\big(-2\,;\,3\,;\,1\big)$; $\overrightarrow{s}\big(11\,;\,2\,;\,-1\big)$
   sont non-coplanaires.

2. On considère les trois vecteurs suivants :
   $\overrightarrow{u}\big(-2\,;\,1\,;\,5\big)$; $\overrightarrow{v}\big(1\,;\,-3\,;\,-2\big)$; $\overrightarrow{w}\big(-5\,;-5\,;14\big)$

   a. Justifier que la coplanarité de ces trois vecteurs est équivalent à la condition :
   $$\mathcal{S}_{(T)} \neq \Big\{\big(0\,;\,0\,;\,0\big)\Big\}$$

   b. En déduire que les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

E.27 On munit l'espace d'un repère $\big(O\,;I\,;J\,;K\big)$:

1. On considère les quatre points suivants :
   $A\big(-5\,;-2\,;3\big)$; $B\big(0\,;0\,;6\big)$
   $C\big(-7\,;-1\,;7\big)$; $D\big(-21\,;-3\,;9\big)$
   Montrer que les points A, B, C, D sont coplanaires.

2. On considère les 5 points suivants :
   $E\big(-2\,;1\,;-1\big)$; $F\big(-4\,;3\,;-2\big)$
   $G\big(-3\,;4\,;-4\big)$; $H\big(-5\,;6\,;2\big)$; $L\big(-11\,;8\,;5\big)$
   Monter que la droite (HL) n'est pas parallèle au plan (EFG).

E.28 Dans l'espace muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\;K\big)$, on considère les quatre points suivants :

$A\big(5\,;-4\,;3\big)$; $B\big(7\,;-5\,;6\big)$
$C\big(10\,;-2\,;1\big)$; $D\big(-11\,;-14\,;17\big)$

Montrer que les points A, B, C, D sont coplanaires.

E.29 On considère dans l'espace muni d'un repère les deux vecteurs suivants définis par leurs coordonnées :

$\overrightarrow{u} = \big(3\,;\,2\,;1\big)$; $\overrightarrow{v} = \big(-1\,;\,3\,;\,1\big)$

On considère le vecteur $\overrightarrow{w}$ définit en fonction de x un nombre réel par ses coordonnées :
$\overrightarrow{w}\,\big(2\,;\,16\,;\,x\big)$

Déterminer le*(s)* valeur*(s)* de x tel*(les)* que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

E.30 Dans l'espace muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\,;K\big)$ orthonormé, on considère quatre points repérés par leurs coordonnées :

$A\big(3\,;-1\,;5\big)$; $B\big(-2\,;2\,;3\big)$; $C\big(-1\,;-2\,;4\big)$; $D\big(5\,;8\,;4\big)$

Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires?

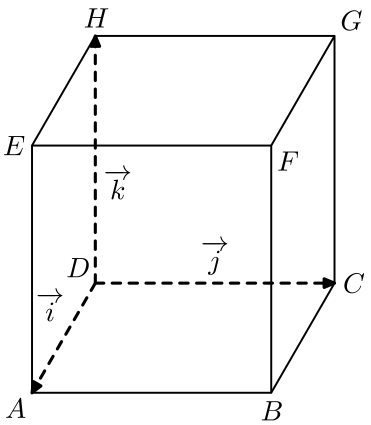
E.31 Dans l'espace muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\,;K\big)$ orthonormé, on considère quatre points repérés par leurs coordonnées :

$A\big(3\,;-1\,;5\big)$; $B\big(-2\,;2\,;3\big)$; $C\big(-1\,;-2\,;4\big)$; $D\big(5\,;8\,;4\big)$

Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires?

8. *Equation cartésienne du plan*

E.32 On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



On munit l'espace du repère $\big(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DH}\big)$.

1. Nommer les plans admettant les équations cartésiennes suivantes :

   a. $z = 0$ b. $y = 1$
   c. $x + y = 1$ d. $x + y + z = 2$
   e. $x + y + z = 1$ f. $x - y = 0$

2. Déterminer l'équation cartésienne de chacun des plans suivants :

   a. (EHD) b. (FGH) c. (HDC)

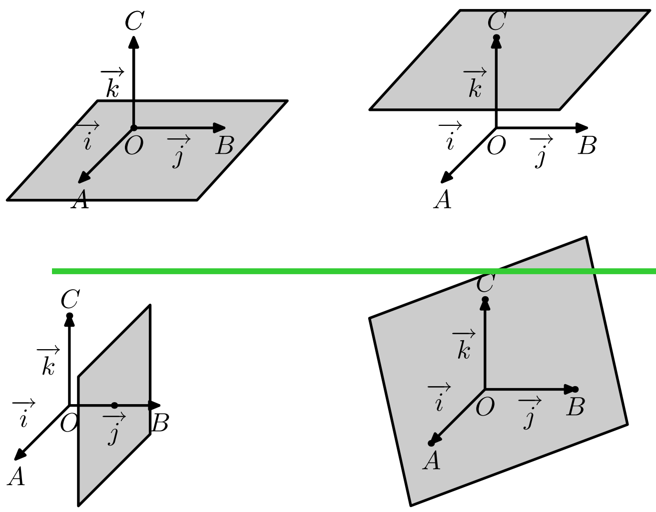
3. a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{BG}$ est orthogonal au plan (EFC).

   b. En déduire une équation du plan (EFC).

E.33 On considère les quatre points suivants :

1. le plan $(\mathcal{P}_1)$ est parallèle au plan (OAB) et passe par le point C ;
2. le plan $(\mathcal{P}_2)$ est passent par les points A, B, C ;
3. le plan $(\mathcal{P}_3)$ médian du segment $[OB]$;
4. le plan $(\mathcal{P}_4)$ est parallèle au plan (OAB) et passe par le point O ;

Associer à chaque plan une des représentations ci-dessous et donner son équation cartésienne.



E.34 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère le plan $(\mathcal{P})$ passant par le point $A\left(1\,;2\,;-1\right)$ et admettant le vecteur $\vec{n}\left(1\,;-1\,;3\right)$ pour vecteur normal.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
2. Les points $B\left(2\,;8\,;1\right)$ et $C\left(-2\,;5\,;1\right)$ appartiennent-ils au plan $\mathcal{P}$?

E.35 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé, on considère le plan $(\mathcal{P})$ passant par le point A et admettant $\vec{n}$ pour vecteur normal où :

$$A\left(3\,;1\,;2\right) \quad ; \quad \vec{n}\left(2\,;1\,;-1\right)$$

On considère les points M et N deux points de l'espace où :

$$M\left(4\,;-2\,;1\right) \quad ; \quad N\left(-2\,;8\,;2\right)$$

Les points M et N appartiennent-ils au plan $(\mathcal{P})$?

E.36 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
On considère les points :

$$A\left(1\,;-1\,;4\right) \quad ; \quad B\left(7\,;-1\,;-2\right) \quad ; \quad C\left(1\,;5\,;-2\right)$$

1. Justifier que les trois points A, B, C forment un plan.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\left(1\,;1\,;1\right)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
3. En déduire que $x+y+z-4=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

9. *Equation cartésienne du plan - recherche du vecteur normal*

E.37 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On considère le plan $(\mathcal{P})$ admettant l'équation cartésienne suivante :

$$(\mathcal{P}) : \; 5{\cdot}x - 2{\cdot}y + z - 5 = 0$$

1. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $(\mathcal{P})$.
2. Déterminer l'équation du plan $(\mathcal{Q})$ parallèle au plan $(\mathcal{P})$ et passant par le point $A\left(5\,;-1\,;2\right)$

E.38 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On considère les point $A\left(2\,;-3\,;-1\right)$ et $B\left(-1\,;1\,;0\right)$.

Déterminer l'équation du plan médiateur du segment $[AB]$.

10. *Positions relatives de plans*

E.39 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne :

$$(\mathcal{P}) : \; 2x - y + z + 3 = 0 \quad ; \quad (\mathcal{P}') : \; -4x + 2y - 2z - 1 = 0$$

Justifier que ces deux plans sont parallèles.

11. *Plan sécant et représentation paramétrique de l'intersection*

E.40 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
Soit $(\mathcal{P}_1)$ le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et $(\mathcal{P}_2)$ le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$.

1. Montrer que $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont perpendiculaires.

   On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si, et seulement si, un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$. Montrer qu'une représentation paramétrique de (d) est :
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

E.41 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne :
$$(\mathcal{P}) :\ x + 2y - z + 3 = 0 \quad ; \quad (\mathcal{P}') :\ 4x - 2y + z - 1 = 0$$

1. Justifier que ces deux plans sont sécants.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

12. *Positions relatives de droites et de plans*

E.42 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On considère :

- $(\mathcal{P})$ est le plan passant par $A(3\,;1\,;2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1\,;-4\,;1)$;
- (d) est la droite passant par $B(1\,;4\,;2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;1\,;3)$.

1. Démontrer que le plan $(\mathcal{P})$ a pour équation cartésienne : $x - 4y + z - 1 = 0$
2. Montrer que la droite (d) est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

E.43 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère la droite (d) admettant la représentation paramétrique et le plan $(\mathcal{P})$ admettant l'équation cartésienne définie par :
$$(d) : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad (\mathcal{P}) :\ 2x - 4y - 2z + 3 = 0$$

1. a. Justifier que la droite (d) est parallèle au plan $(\mathcal{P})$.
   b. La droite (d) est-elle incluse dans le plan $(\mathcal{P})$?
2. On considère le plan $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne :
   $(\mathcal{P}') :\ 2x - 4y - 2z + c = 0 \quad$ où $c \in \mathbb{R}$

   Déterminer la valeur du paramètre c afin que la droite (d) soit incluse dans le plan $(\mathcal{P}')$.

E.44 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère la droite (d) admettant la représentation paramétrique et le plan $(\mathcal{P})$ admettant l'équation cartésienne définie par :
$$(d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad ; \quad (\mathcal{P}) :\ 3x - y + 2z + 1 = 0$$

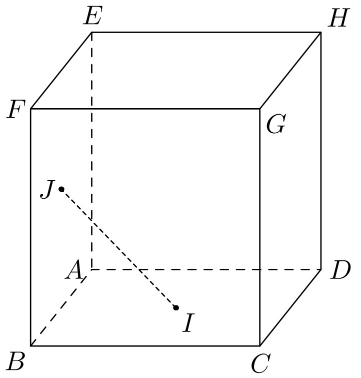
1. Justifier que la droite (d) est sécante au plan $(\mathcal{P})$.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) et du plan $(\mathcal{P})$.

E.45 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On note (D) la droite passant par les points $A(1\,;-2\,;-1)$ et $B(3\,;-5\,;-2)$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$
2. On note (D') la droite ayant pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$
   Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.
3. On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $4{\cdot}x + y + 5{\cdot}z + 3 = 0$.
   a. Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ contient la droite (D).
   b. Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ et la droite (D') se coupent en un point C dont on précisera les cordonnées.

E.46 Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$. Les points I et J représentent respectivement les centres des faces $ABCD$ et $ABFE$.



On munit l'espace du repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. a. Donner les coordonnées des points I et J.

   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. On considère la droite (Δ) admettant la représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \dfrac{1}{2} + 2\cdot t \\ z = -t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$
Démontrer que les droites (Δ) et (IJ) sont non-coplanaires.

3. a. Justifier que le plan (AGH) admet pour équation : $y-z=0$

   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (IJ) et du plan (AGH).

13. *Un peu plus*

E.47 *On considère un cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).*

1. On se place dans le repère $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DH}\right)$. Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

$A\,(1\,;0\,;0)$; $B\,(1\,;1\,;0)$; $C\,(0\,;1\,;0)$; $D\,(0\,;0\,;0)$

$E\,(1\,;0\,;1)$; $F\,(1\,;1\,;1)$; $G\,(0\,;1\,;1)$; $H\,(0\,;0\,;1)$

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).

   c. En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

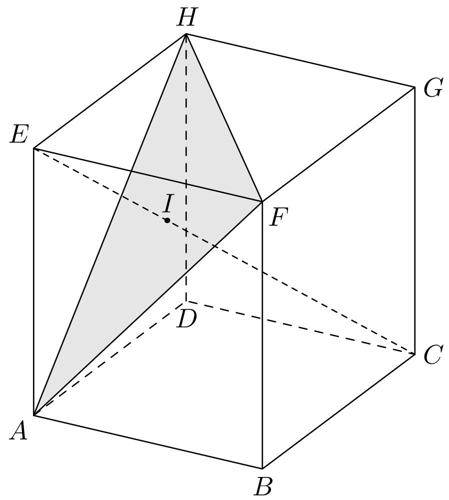
   d. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

   e. Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).
   ~~Que représente le point I pour le triangle AFH?~~

2. *Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Définitions :
- Un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
- il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
- il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

Préciser de quel*(s)* type*(s)* est le tétraèdre $EAFH$.



14. *Ancienne annales (avant 2012)*

E.48 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

1. On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $B(1\,;-2\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(-2\,;1\,;5)$ et le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne $x+2y-7=0$

   a. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.

   b. Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point $C(-1\,;4\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;-1\,;1)$.

   c. Soit le point $A(5\,;-2\,;-1)$. Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ puis la distance du point A au plan $\mathcal{R}$.

   d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

2. a. Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1+2\cdot t\,;3-t\,;t)$.
   Déterminer en fonction de t la longueur AM_t.

On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.

(b) Interpréter géométrique la valeur de ce minimum.

E.49 L'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé direct.

Il n'est pas demandé de faire de figure.

Les questions (3) et (4) sont indépendantes des questions (1) et (2).

On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\ ;\ B\begin{pmatrix}1\\-6\\-1\end{pmatrix}\ ;\ C\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\ ;\ I\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

(1) (a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, b, C.

(2) Soit (Q) le plan d'équation : $x+y-3z+2=0$ et (Q') le plan de repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

(a) Pourquoi (Q) et (Q') sont-ils sécants?

(b) Donner un point E et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q').

(3) Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

(4) On considère les points J et K de coordonnées respectives :

$$\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Déterminer avec soin l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK).

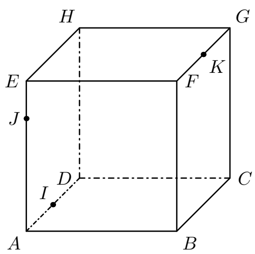
15. *Exercices non-classés*

E.50 Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

E.51

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$. Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :



- I est le milieu du segment $[AD]$
- J est tel que : $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AE}$
- K est le milieu du segment $[FG]$.

On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK).

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que : $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$

Le point R est-il à l'intérieur du cube?

E.52 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$, on considère le plan $(\mathcal{P})$ admettant pour équation cartésienne :

$$2\cdot x + 3\cdot y - z + 1 = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}\,(4\,;-2\,;2)$ admet-il un représentant inclus dans le plan $(\mathcal{P})$.

E.53 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

On considère :

- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $B(1\,;-2\,;1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(-2\,;1\,;5)$;
- le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne : $x+2y-7=0$.

(1) Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.

(2) Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point $C(-1\,;4\,;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;-1\,;1)$.

(3) Soit le point $A(5\,;-2\,;-1)$. Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ puis la distance du point A au plan $\mathcal{R}$.

(4) Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

E.54 Le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x-y+z-11=0$ est tangent à une sphère $\mathcal{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1\,;-1\,;3)$.

(1) Déterminer le rayon de la sphère $\mathcal{S}$.

(2) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathcal{Q}$.

(3) En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{Q}$.

E.55 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$, on donne les points :

$A(3\,;2\,;-1)$; $B(-6\,;1\,;1)$

$C(4\,;-3\,;3)$; $D(-1\,;-5\,;-1)$

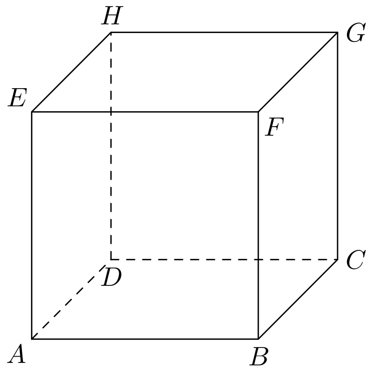
1. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est :
   $-2{\cdot}x-3{\cdot}y+4{\cdot}z-13=0$
2. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}$.

E.56 L'espace est muni du repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation :

$3{\cdot}x+2{\cdot}y=29$

1. Démontrer que $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (Oz) de vecteur directeur $\vec{k}$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les axes (Ox) et (Oy) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
3. Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les trois plans de coordonnées.
4. Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (xOy), les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

E.57 On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-dessous :



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DH}\right)$.

On note K le barycentre des points pondérés $(D\,;1)$ et $(f\,;2)$

Partie A

1. Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.
2. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.
3. Calculer la distance EK.

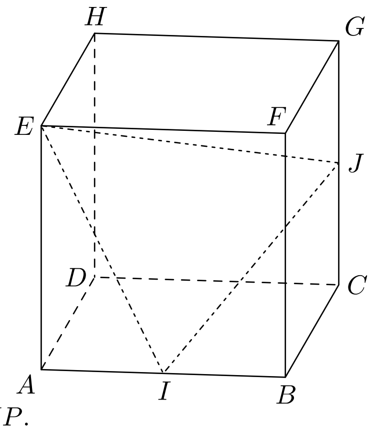
Partie B

Soit M un point du segment $[HG]$.
On note $m=HM$ *(m est donc un réel appartenant à $[0\,;1]$).*

1. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.
2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est :
   $(-1+m){\cdot}x+y-m{\cdot}z=0$.
3. On note d_m la distance du point E au plan (MFD).
   a. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$:
   $$d_m=\frac{1}{\sqrt{2{\cdot}m^2-2{\cdot}m+2}}$$
   b. Déterminer la position de M sur le segment $[HG]$ pour laquelle la distance d_m est maximale.
   c. En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD)

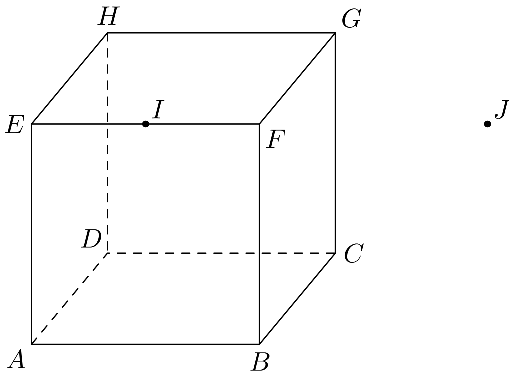
E.58 On considère le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1,

et on note I et J les milieux des arêtes $[AB]$ et $[CG]$. On utilisera le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$



1. Déterminer l'équation cartésienne du plan EFJ.
2. Déterminer les coordonnées du point P projeté du point I sur le plan (EFJ).
3. Déterminer la distance IP.
4. Montrer que le volume du tétraèdre $EFIJ$ est égal à $\frac{1}{6}$

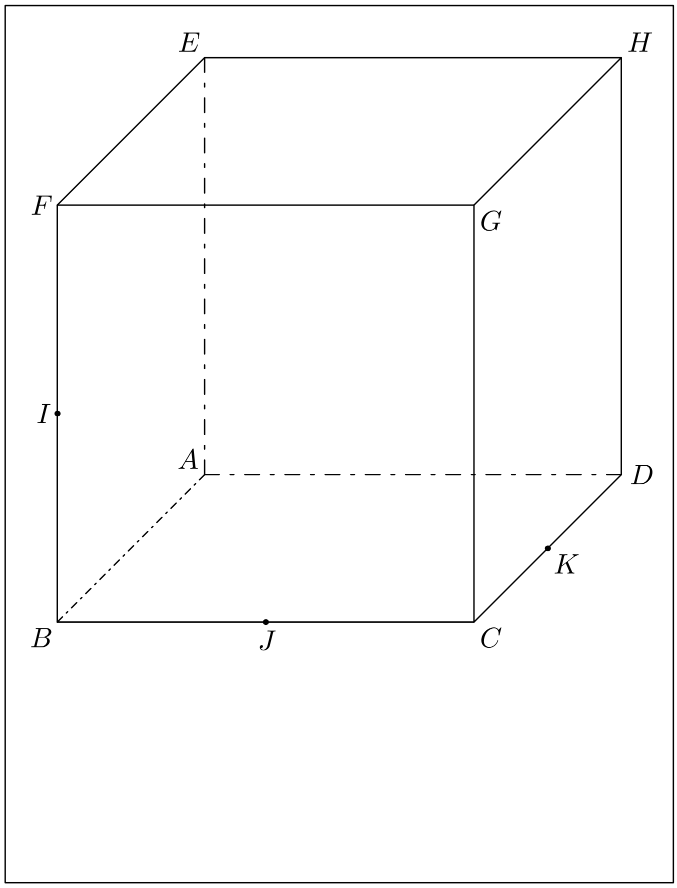
E.59 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$).

1. a. Déterminer les coordonnées des points I et J.
   b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   c. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   d. Calculer la distance du point F au plan (BGI). `(hors programme 2012)`.
2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).
   b. Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face $ADHE$.
   c. Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{6}\,;\frac{5}{6}\right)$.
   d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI?

E.60 $ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[BC]$.
Le point K est le milieu du segment $[CD]$.



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure fournie ci-dessus et en laissant apparent les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées A, G, I, J et K dans ce repère.
2. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
3. On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle $[0\,;1]$ tel que $\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AG}$.
   a. Démontrer que : $MI^2=3\cdot t^2-3\cdot t+\frac{5}{4}$
   b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.
4. Démontrer que pour ce point $N\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$:
   a. N appartient au plan (IJK).
   b. La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

