Terminale Spécialité / Limites de fonctions numériques

1. *Rappels : généralités*

E.1 Questionnaire à choix multiples :

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. Une bonne réponse rapporte 0,5 *point une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse donne* 0 *point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée est* 0.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left]-5\,;+\infty\right[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5	-1	0	2	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	-3 ↘	-5 ↗	4 ↘	-4,5

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f :

1. Sur l'intervalle $\left]-5\,;+\infty\right[$, l'équation $f(x)=-2$:
   - a. admet une seule solution
   - b. admet deux solutions
   - c. admet quatre solutions.
2. Sur l'intervalle $\left]-5\,;+\infty\right[$, la fonction f :
   - a. admet pour minimum la valeur -5 ;
   - b. admet pour maximum la valeur 4 ;
   - c. admet deux maximums.
3. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :

   a. $y=4$ b. $y=4(x-2)$ c. $x=4$

E.2 On considère une fonction f définie et dérivable sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;-2\right[$ et $\left]-2\,;+\infty\right[$.
La fonction f admet le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-2		1	α	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	$-\infty$ ‖	$+\infty$ ↘	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$

où α est le nombre réel strictement supérieur à 1 tel que $f(\alpha)=0$.

On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Dire pour chacune des cinq affirmations suivantes si elle est "*vraie*" ou si elle est "*fausse*" ou si "*on ne peut pas conclure*". Aucune justification n'est demandée.

Le barème est le suivant :
- 0,5 point par réponse exacte ;
- 0,25 point par réponse fausse ;
- 0 point pour absence de réponse.

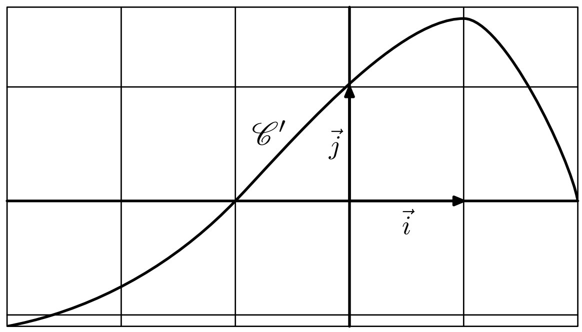
Il n'y aura pas de note globale négative.

1. L'équation $f(x)=1$ admet exactement deux solutions.
2. $f(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in\left]-5\,;-2\right[$.
3. Si $-2<x<1$ et $x<x'$ alors $f(x)<f(x')$.
4. $f'(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in\left]-\infty\,;-2\right[$.

E.3 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $\left[-3\,;2\right]$.

On dispose des informations suivantes :
- $f(0)=-1$
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $\left[-3\,;-1\right]$, $f'(x)\leqslant 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[-1\,;2\right]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $\left[-3\,;2\right]$: $f(x)\geqslant -1$.
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,;0)$.

2. *Rappels : polynômes du second degré*

E.4 Chacun de ces polynômes admettent au moins une racine parmi l'ensemble suivant :
$\left\{-2\,;-1\,;1\,;2\right\}$

Utiliser ce renseignement pour effectuer "*rapidement*" la factorisation de chacun des polynômes suivants :

Ⓐ $x^2 + 2x - 8$ Ⓑ $2x^2 - 4x - 6$

Ⓒ $x^2 + x - 6$ Ⓓ $3x^2 - 4x + 1$

Ⓔ $x^3 + x^2 - 2x$ Ⓕ $5x^2 + 3x - 2$

E.5 Dresser le tableau de variations de chacun des polynômes du second degré suivant :

a) $x^2 - 5x + 1$ b) $-3x^2 + x - 1$

c) $2(x+1)(2x-1)$ d) $(2-x)(4+x)$

E.6 Résoudre les équations suivantes :

a) $3x^2 + 4x + 1 = 0$ b) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

c) $-x^2 + 2x + 3 = 0$ d) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

e) $-3x^2 + 3x + 3 = 0$ f) $-x^2 + 4x + 3 = 0$

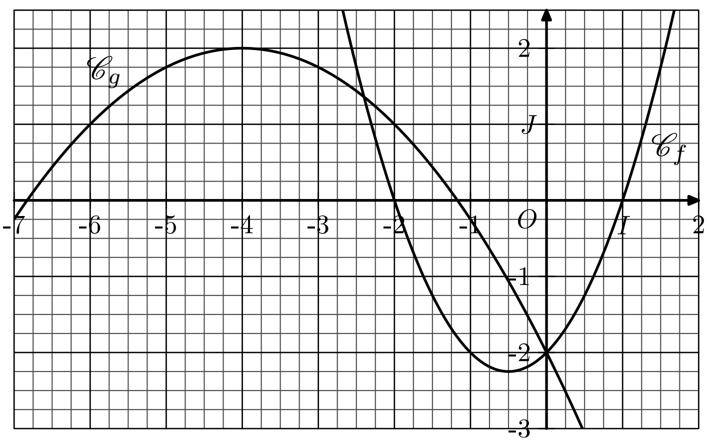
E.7 Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

a) $3x^2 + 4x + 1$ b) $-3x^2 + 4x - 1$ c) $-4x^2 + 5x$

d) $x^2 + 2x - 1$ e) $-x^2 + 4x + 1$ f) $3x^2 - 4x + 2$

E.8 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 + x - 2 \quad ; \quad g(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^2 - 2\cdot x - 2$$



Les questions ci-dessous doivent être traitées algébriquement :

1) Déterminer les antécédents de 0 par les fonctions f et g.

2) a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

b) En déduire la position relative de ces deux courbes.

3. *Rappels : dérivées*

E.9 On considère la fonction f dont l'image de $x\in\mathbb{R}$ est défini par le polynôme suivant du second degré :
$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$

1) a) Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

b) Déterminer le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire le tableau de variations de la fonction f *(on complétera le tableau de variations à l'aide de valeurs arrondies).*

3) À l'aide du tableau de variation, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

E.10 On considère la fonction f définit par :
$f : x \longmapsto -x^3 - 3x^2 - 2x$

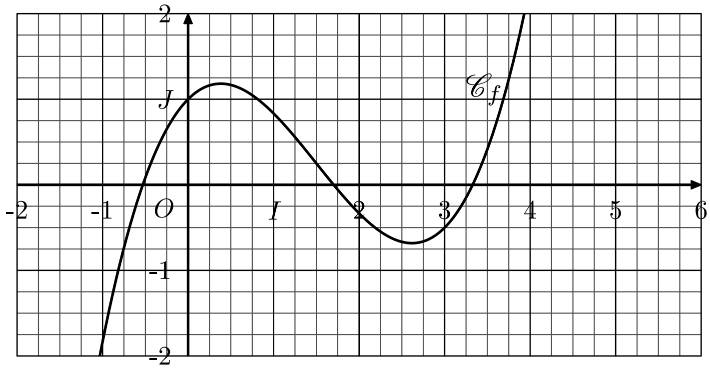
1) Déterminer les zéros de la fonction f.

2) a) Donner l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. *(on omettra les valeurs dans le tableau de variation)*

E.11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{3}{2}\cdot x^2 + x + 1$$

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



On note (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

1) a) Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 3.

b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (Δ).

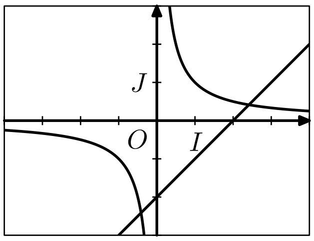
c) Tracer dans le repère la droite (Δ).

2) Déterminer, algébriquement, l'équation réduite de la droite (Δ).

E.12 Soit l'équation (E) : $\dfrac{1}{x}=x-2$ où l'inconnue est un réel de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1. Un élève a représenté sur sa calculatrice l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ et la droite d'équation $y=x-2$.

Au vu du graphique ci-dessus obtenu à l'écran de sa calculatrice, combien l'équation (E) semble-t-elle admettre de solutions sur $]0\,;+\infty[$



2. Un second élève considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
   $g(x)=x-2-\dfrac{1}{x}$
   a. On note g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(x)$. Montrer que g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
   b. Déterminer les images, par la fonction g, des nombres 1 et 4.
   Conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E).
3. Un troisième élève dit : "Je peux résoudre l'équation (E) algébriquement". Justifier, en résolvant l'équation (E), que ce troisième élève a raison.

4. *Introduction aux limites de fonctions*

E.13 On considère la fonction f définie par :

$f\colon x\longmapsto x+\dfrac{1}{x}$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a. Par des calculs mentaux, Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

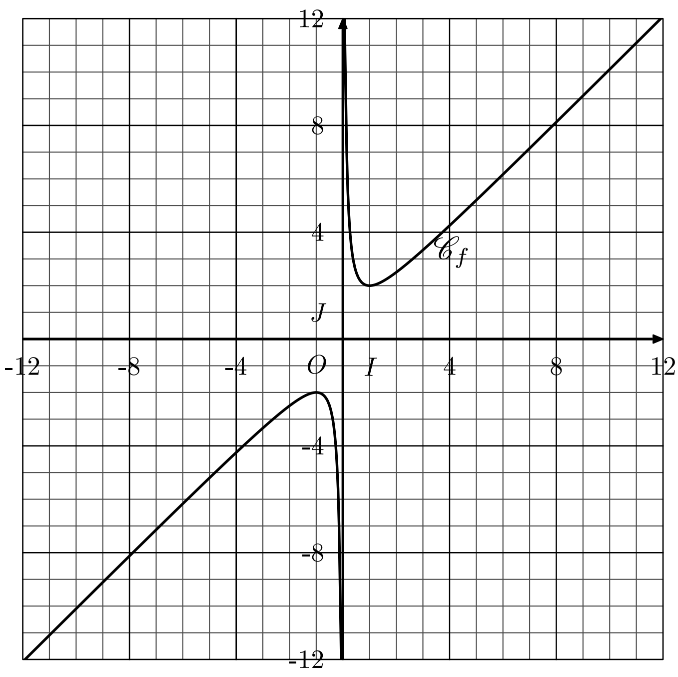
x	1	10	100	1000
$f(x)$				

   b. Que peut-on dire de la valeur de "$f(x)$" lorsque "x" grandit énormément?
3. a. Par des calculs mentaux, compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$f(x)$				

   b. Que peut-on dire de la valeur de "$f(x)$" lorsque "x" reste positif, mais en devenant de plus en plus petit?

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormée :



4. Interpréter graphiquement les résultats de la question 3.

E.14 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a. Recopier et compléter le tableau de valeur ci-dessous :

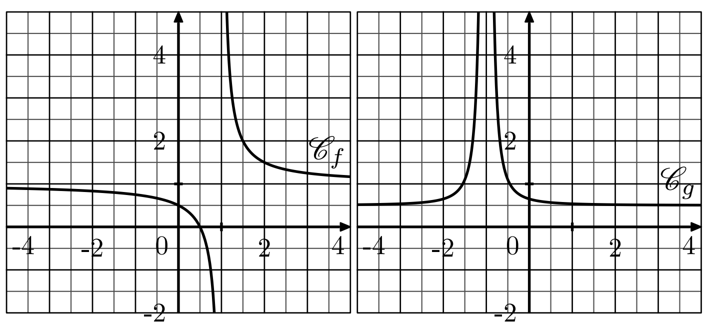
x	$\dfrac{1}{2\pi}$	$\dfrac{1}{4\pi}$	$\dfrac{1}{40\pi}$	$\dfrac{1}{2^{72}\pi}$
$f(x)$				

   b. Recopier et compléter le tableau de valeur ci-dessous :

x	$\dfrac{2}{\pi}$	$\dfrac{2}{5\pi}$	$\dfrac{2}{41\pi}$	$\dfrac{2}{(2^{101}+1)\pi}$
$f(x)$				

   c. Peut-on parler de limite pour cette fonction lorsque x se rapproche de 0?
3. Effectuer le tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de cette fonction puis effectuer un zoom sur l'origine du repère. Que voyez-vous?

E.15 On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :

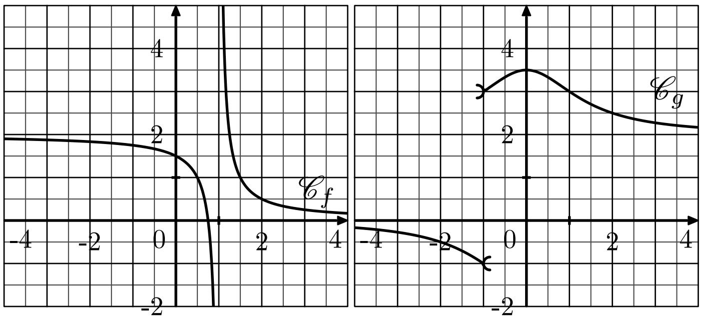


Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto1^+} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ f. $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} g(x)$

E.16 On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\mapsto1^-} f(x)$

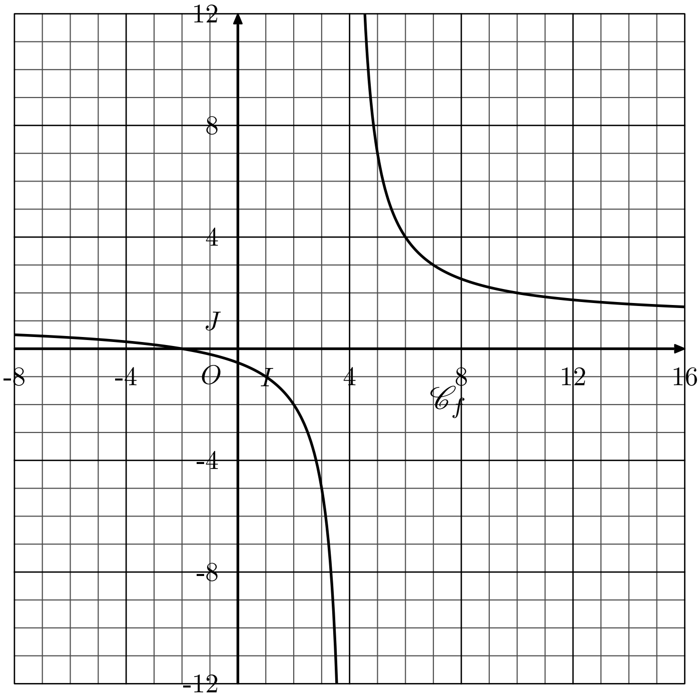
(d) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ (e) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto-1^-} g(x)$

E.17 On considère la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{x+2}{x-4}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer la valeur des réels a et b réalisant l'identité suivante pour tout $x\in\mathcal{D}_f$:
$$f(x) = a + \frac{b}{x-4}$$
3. À l'aide de l'expression obtenue à la précédente question :
   (a) Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque la valeur de x grandit indéfiniment?
   (b) Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x appartient à $]4\,;5]$ et que sa valeur se rapproche de plus en plus près de 4?
   (c) Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x appartient à $[3\,;4[$ et que sa valeur se rapproche de plus en plus près de 4?

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormée :



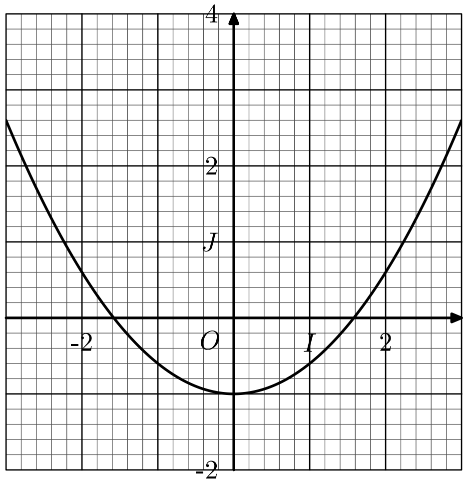
4. Interpréter graphiquement les résultats précédemment obtenus.

E.18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2 - 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé donné ci-contre :

Le but de l'exercice est de déterminer l'équation réduite de la tangente, notée (T), à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.



1. (a) Montrer que pour h un nombre réel non-nul, on a :
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\cdot h.$$
   (b) En déduire la valeur du nombre dérivée $f'(1)$ de la fonction f en 1.
2. (a) Justifier que l'expression de la tangente (T) est de la forme :
$$y = \frac{4}{5}\cdot x + b$$
   (b) Donner les coordonnées du point appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 1.
   (c) Déterminer l'expression réduite de la tangente (T).
3. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

E.19 Graphiquement et à l'aide de la calculatrice, déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x-1}{3-x}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x-1}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto-2^+} \dfrac{-2\cdot x^2 - 2\cdot x + 4}{2\cdot x + 4}$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \left(x^2+x\right)\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

5. Limites sans formes indéterminées

E.20 Déterminer les limites ci-dessous :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{x^2-3x+5}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{5-x}{1-x}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{x^2+x+1}{x}$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x-1}{-x^3}$

E.21 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x+\dfrac{1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} (x+1)\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^2-x+2$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} (x+2)(1-x)$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} x+\dfrac{1}{x}$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x-1}$

6. Limites avec formes indéterminées

E.22 Sans déterminer les limites, préciser lesquelles présentent une forme indéterminée :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x^2+2{\cdot}x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^2+2{\cdot}x}{x^3-x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \sqrt{x^2-x-2}\cdot(x-2)$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x-1}{x^2+x}$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^3-2x^2+1$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x^3-2x^2+1$

E.23 Sans déterminer les limites, préciser lesquelles présentent une forme indéterminée :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x+\sqrt{x}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x-\sqrt{x}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x-\dfrac{1}{x}$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x-\dfrac{1}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x+1}{x}$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{x+1}{x}$

E.24 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} 2{\cdot}x^2+3{\cdot}x$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} -3{\cdot}x^3+\dfrac{2}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} 5{\cdot}x^2-3{\cdot}x^3$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x^2+2{\cdot}x-(x+2)^2$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^2+3{\cdot}x$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^3-2{\cdot}x^2$

E.25 Déterminer la valeur des limites ci-dessous :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x^2-x$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^2+x^3$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto 2^-} \dfrac{5}{(x-2)^2}-\dfrac{3}{x-2}$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^3+x-2$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^2+1}{x}-\dfrac{x+1}{x}$

7. Limites de fractions rationnelles en l'infini

E.26

(1) On considère la fonction f définie par :

$$f\colon x\longmapsto \frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}$$

(a) Établir l'égalité suivante :

$$\frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}=\frac{3+\dfrac{5}{x}}{x{\cdot}\Big(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\Big)}$$

(b) En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x)$.

(2) On considère la fonction g définie par :

$$g\colon x\longmapsto \frac{4x^3+2x+1}{2x^3-2x^2}$$

Par un raisonnement analogue à la question précédente, établir l'égalité suivante : $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} g(x)=2$

E.27 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{x^2+2}{x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \dfrac{x-3}{2{\cdot}x^2-3}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \dfrac{4{\cdot}x^2-3{\cdot}x+2}{-3{\cdot}x^2}$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \dfrac{x^5+x^4}{x^3-x}$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{5{\cdot}x^4-2{\cdot}x^3}{3{\cdot}x^2-2}$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{2{\cdot}x^{10}+x}{6{\cdot}x^{10}-2{\cdot}x^3}$

8. Limites de fractions rationnelles en 0

E.28 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation : $f(x)=\dfrac{2{\cdot}x^3-x}{x^3+2{\cdot}x^2}$

(1) Établir les identités suivantes :

$$f(x) = \frac{2-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}} = \frac{2\cdot x^2-1}{x\cdot(x+2)}$$

(2) Déterminer la valeur des limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto0^+} f(x)$

E.29 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \frac{1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \frac{1}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \frac{3}{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \frac{x^3+2\cdot x}{x^2+x}$ (e) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \frac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3}$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \frac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3}$

9. Limites de fractions rationnelles avec factorisation

E.30 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \frac{2-x}{2\cdot x^2-x-6}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto3^-} \frac{x-3}{2\cdot x^2-15\cdot x+27}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto1^-} \frac{-3\cdot x^2+7\cdot x-4}{(x-1)^2}$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto-2^+} \frac{3\cdot x^2+5\cdot x-2}{x^2+7\cdot x+10}$

10. Limites de fractions rationnelles avec tableau de signes

E.31 On considère la fonction f définie par la relation :
$$f(x) = \frac{x^2+3\cdot x}{2\cdot x^2-10\cdot x+12}$$

(1) Établir les identités suivantes :
$$f(x) = \frac{1+\dfrac{3}{x}}{2-\dfrac{10}{x}+\dfrac{12}{x^2}} = \frac{x\cdot(x+3)}{(x-2)(2\cdot x-6)}$$

(2) Dresser le tableau de signes de $(x-2)(2x-6)$.

(3) En déduire la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\mapsto2^-} f(x)$

(f) $\lim\limits_{x\mapsto2^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\mapsto3^-} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto3^+} f(x)$

E.32 Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \frac{1}{2\cdot x^2-5\cdot x+2}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \frac{1}{2\cdot x^2-12\cdot x+16}$

E.33 Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto-1^-} \frac{x+4}{3x^2-x-4}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto1^-} \frac{x^2+x-3}{3\cdot x^2-7\cdot x+4}$

11. Limites de fractions rationnelles

E.34 On considère le polynôme $P=3\cdot x^2-x-2$.

(1) Factoriser le polynôme P en laissant une trace de votre démarche.

(2) Déterminer la valeur des deux limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto1^+} \frac{2\cdot x-3}{3\cdot x^2-x-2}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto1^+} \frac{2\cdot x-2}{3\cdot x^2-x-2}$

E.35 Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{3x^2-x+1}{5x^2}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{2x+1}{3x^3-x+1}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \frac{x^{16}-x^3+x}{x^3-x^2}$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \frac{x^5-x^4}{x^6-2\cdot x^4}$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \frac{1}{x^2-x-2}$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto3^-} \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

E.36 Chacune des limites ci-dessous présente une forme indéterminée. Démontrer le résultat attendu en mettant en évidence la bonne transformation algébrique :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x} = +\infty$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{5x^2+3}{2x^2-3x+1} = \frac{5}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto3} \frac{x^2-5x+6}{x-3} = 1$

E.37 Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{3x^6+2x^3}{2x^8-x^3}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto0} \frac{3x^5-x^3}{x^4+x^3}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto3^+} \frac{1}{-2x^2+4x+6}$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \frac{x^2-3x+2}{-3x^2+5x+2}$

E.38 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{2\cdot x^3+x-2}{-x^2-2}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \frac{3\cdot x^3-2\cdot x^2}{x^4+x^3}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto3^+} \frac{x-6}{2x^2-15x+27}$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} \frac{2x^2+5x+3}{-x^2+x+2}$

E.39 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x^4-3x}{2x^2-4x^4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^+}\frac{x-1}{2x^2+5x+2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto2^+}\frac{4-2x}{3x^2-4x-4}$

E.40 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+}\frac{1}{x-x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^+}\frac{x^2+6x+3}{2{\cdot}x^2+x-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{3x^2+14x-4}{x+5}-3x+1$

E.41 Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{5x^2+3x-1}{3x^3+2x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-}\frac{3x^4-2x}{x^3+x^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto2^+}\frac{x^2-4x+4}{-2x^2+10x-12}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^+}\frac{1}{2x^2+x-1}$

E.42 Chacune des limites ci-dessous représente une forme indéterminée ; effectuer les transformations algébriques adéquates pour déterminer chacune de ses limites :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^+}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{5x^2-3x+1}{2x^2+x-2}$

12. *Limites et radicaux : expression conjuguée*

E.43

(1) Établir l'égalité algébrique suivante pour $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$$

(2) En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{x\mapsto0^+}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=-2$$

E.44 Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^+}\frac{1-x}{\sqrt{x+3}-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^+}\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+4x+3}$

E.45 Chacune des limites ci-dessous représente une forme indéterminée ; effectuer les transformations algébriques adéquates pour déterminer chacune de ses limites :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}x\sqrt{x}-x$ (c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto2^-}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$

E.46 Déterminer la valeur des limites :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}\sqrt{x^2-7}+x$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-}\frac{x^2-1}{\sqrt{5-x}-2}$

E.47 Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$

13. *Limites et radicaux : factorisation*

E.48 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2{\cdot}x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(1) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

(2) Établir l'identité suivante : $\displaystyle f(x)=\frac{x{\cdot}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|{\cdot}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

(3) En déduire les deux limites suivantes :

$\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)$

E.49 Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto3^-}\frac{\sqrt{3-x}}{2x^2-5x-3}$

E.50 Chacune des limites ci-dessous présente une forme indéterminée. Démontrer le résultat attendu en mettant en évidence la bonne transformation algébrique :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-}\frac{1-x}{\sqrt{1-x}}=0$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\frac{2}{3}^+}\frac{2x-1}{3x+2}{\cdot}\sqrt{3x+2}=-\infty$

E.51

(1) Montrer que, pour $x\in\left]-\infty\,;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, on a :

$$\sqrt{3x^2-1}+x=x{\cdot}\left(1-\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}\right)$$

(2) En déduire la valeur de la limite suivante :

$\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}\sqrt{3x^2-1}+x$

E.52 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f:x\longmapsto\frac{\sqrt{x^3+x^2}}{x}$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) (a) Pour $x\in[-1\,;0[$, établir l'égalité : $f(x)=-\sqrt{x+1}$

(b) Déterminer la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-}f(x)$.

(3) Déterminer la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+}f(x)$.

(4) Peut-on parler de la limite de la fonction f en 0.

E.53 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

E.54 Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x}{\sqrt{4{\cdot}x^2-3x+1}}$

14. Asymptotes

E.55 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x-4}{x+1}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Préciser si la courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de la fonction f admet des asymptotes ; on précisera leurs caractéristiques.

E.56 En traçant la courbe représentative de fonctions à l'aide de la calculatrice ou de logiciel de tracer, émettre une conjecture sur l'ensemble de définition et sur les asymptotes à la courbe de chacune des fonctions ci-dessous :

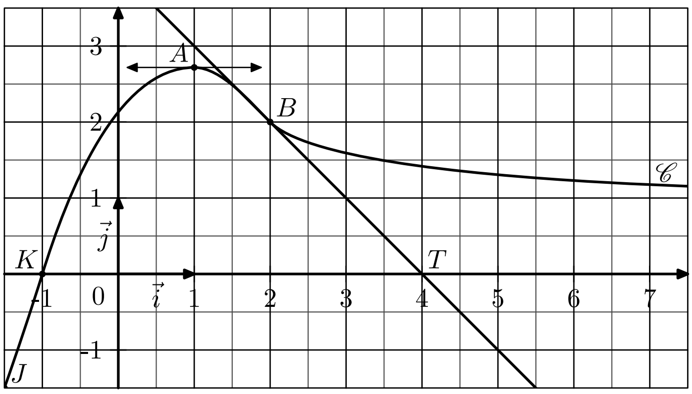
a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ b. $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$

c. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$ d. $j(x) = \dfrac{(x^2+1)\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$

15. Etudes de fractions rationnelles

E.57 Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

- Les points $J\left(-\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$, $K(-1\,;0)$, $A\left(1\,;\frac{11}{4}\right)$, $B(2\,;2)$ sont des points de $\mathscr{C}$;
- La tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente à $\mathscr{C}$ en B passe par $T(4\,;0)$.
- La droite d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
- La fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{3}{2}\,;1\right]$ et strictement décroissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$.

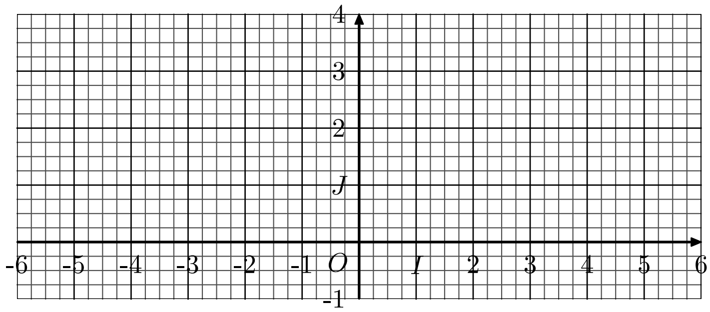


1. Donner les valeurs de $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ ainsi que la limite de f en $+\infty$.
2. Donner, en justifiant vos réponses, les nombres $f'(1)$ et $f'(2)$.

E.58 On considère la fonction f définie par :

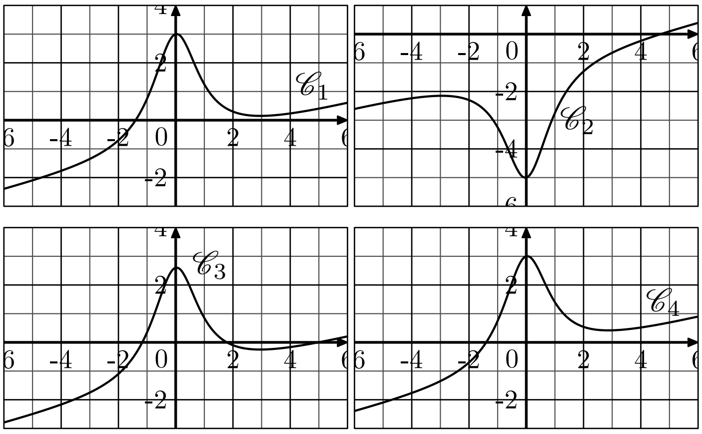
$$f : x \longmapsto \frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+5}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
   b. Quelles asymptotes admet la fonction f ?
3. a. Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet l'expression :
   $$f'(x) = \frac{-6x^2+12x+18}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$$
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
5. Tracer la droite (Δ), les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$ puis la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé ci-dessous :



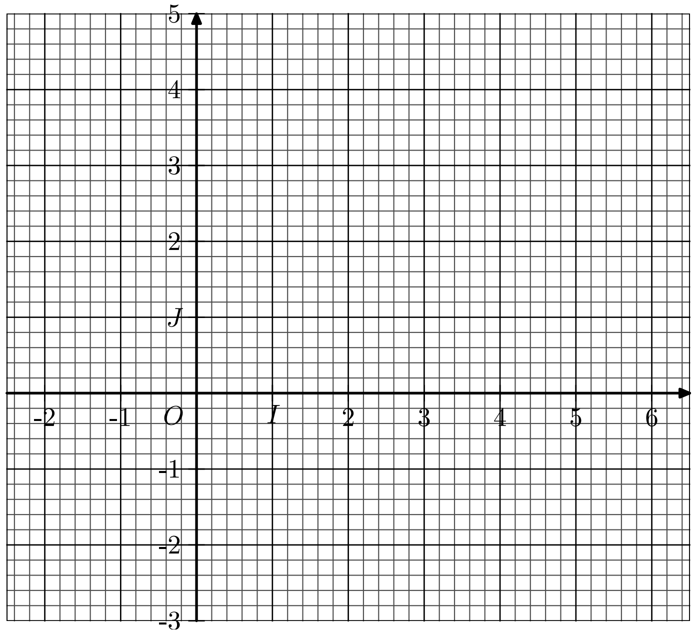
E.59 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 12}{4{\cdot}x^2 + 4}$$
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a. Déterminer la valeur des réels a et b vérifiant l'égalité :
$$f(x) = a{\cdot}x + b + \frac{16}{4{\cdot}x^2 + 4}$$
   b. On note (d) la droite d'équation : $y = \frac{1}{4}{\cdot}x - 1$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d).
3. Déterminer la valeur de la limite :
$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{4}{\cdot}x - 1\right)$$
4. Ci-dessous sont représentées les quatre courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_4$. Laquelle de ces courbes est la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f ?



E.60 Soit f définie sur l'ensemble $\left]-2\,;1\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$ et dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$$f(x) = \frac{-(x-2)^2}{2{\cdot}(x-1){\cdot}(x+2)}$$
Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

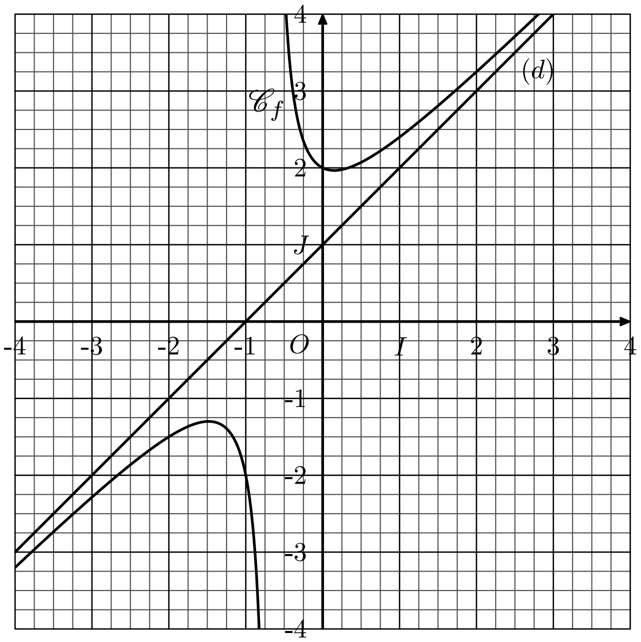
1. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
   b. Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$ et leurs caractéristiques.
2. On note (d) la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.
   a. Déterminer la valeur des réels a, b, c réalisant l'égalité suivante :
$$f(x) = a + \frac{b{\cdot}x + c}{2{\cdot}(x-1){\cdot}(x+2)}$$
   b. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite (d) sur l'intervalle $\left]1\,;+\infty\right[$
3. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet aux points d'abscisses $\frac{2}{5}$ et 2 des tangentes horizontales.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f ; on admettra que l'image de $\frac{2}{5}$ par la fonction f est $\frac{8}{9}$.
4. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
5. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère donné en annexe ; on représentera les asymptotes et les tangentes horizontales à la courbe $\mathscr{C}_f$ ainsi que les droites (d) et (T).



E.61 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$ par :

$$f(x)=\frac{3{\cdot}x^2+5{\cdot}x+4}{3{\cdot}x+2}$$

On notera $\mathscr{C}_f$ la représentation de la fonction f dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ ci-dessous :



La droite (d) est la représentation de la fonction g définie par :

$$g(x)=x+1$$

1. a. Donner, sans justification, les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

   b. Préciser si la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet des asymptotes.

2. a. Déterminer les réels a, b et c réalisant l'égalité :
   $$f(x)=a{\cdot}x+b+\frac{c}{3{\cdot}x+2}$$

   b. En déduire que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' définie par :
   $$f'(x)=\frac{9{\cdot}x^2+12{\cdot}x-2}{\big(3{\cdot}x+2\big)^2}$$

   c. Dresser, en justifiant votre démarche, le tableau de variations de la fonction f.
   On n'indiquera pas la valeur des extremums de f.

3. Pour tout entier naturel n, on considère :
   - M_n le point de (d) d'abscisse n,
   - N_n le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse n,
   - S_n le segment $[M_nN_n]$.

   a. Représenter sur le graphique les segments S_0, S_1 et S_2.

   b. Donner la mesure exacte du segment S_0.

   c. Que peut-on dire de la longueur du segment $[M_nN_n]$ lorsque la valeur de n tend vers $+\infty$.

E.62 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{-6x^2-14x+360}{(x+10)(x+9)}$$

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'image de x par la fonction f est strictement positive.

2. Déterminer les valeurs des limites suivantes :
   $$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)$$

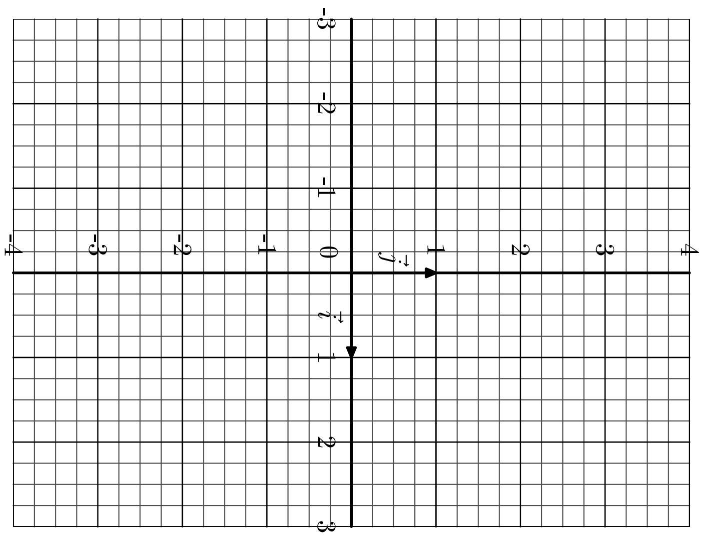
16. *Etudes de fonctions exponentielles*

E.63 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Établir le tableau de variations de la fonction f.
3. Préciser les différentes asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.



E.64 Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{e}$$

1. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

   (b) Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0\,;1]$ en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.

2. Résoudre l'équation suivante dans l'intervalle $[0\,;1]$: $x - \mathrm{e}^{-x} + 1 = \mathrm{e}^{-x} - x - \mathrm{e}^{-1} + 1$

E.65 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\cdot\mathrm{e}^{-2x} - 3\cdot\mathrm{e}^{-3x}$$

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ d'unité $1\,cm$.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
   $$f(x) = 3\cdot\mathrm{e}^{-2x}\cdot\left(\frac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

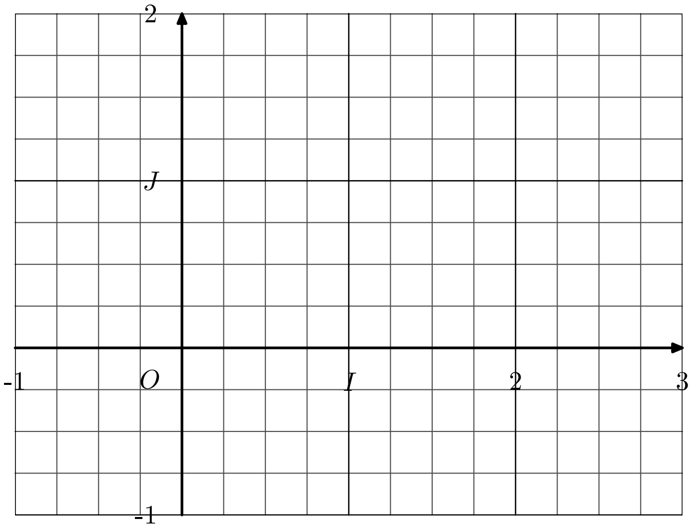
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

3. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

4. (a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.

   (b) Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ intercepte l'axe des abscisses en un seul point.
   Donner les coordonnées de ce point d'intersection, arrondie au dixième près.

5. Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous :



E.66 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\cdot\mathrm{e}^{-2x} - 3\cdot\mathrm{e}^{-3x}$$

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
   $$f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\cdot\left(\frac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$$

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

3. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

E.67 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\cdot\mathrm{e}^{-x}$$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

3. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

E.68 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)\cdot\mathrm{e}^{-x}$$

On note $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan. On prendra $4\,cm$ pour unité graphique.

étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.

17. *Etude de fonctions racines carrées*

E.69 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. (a) Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.

   (b) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes? si oui, préciser.

2. On note (d) la droite d'équation $y=1$. Déterminer la

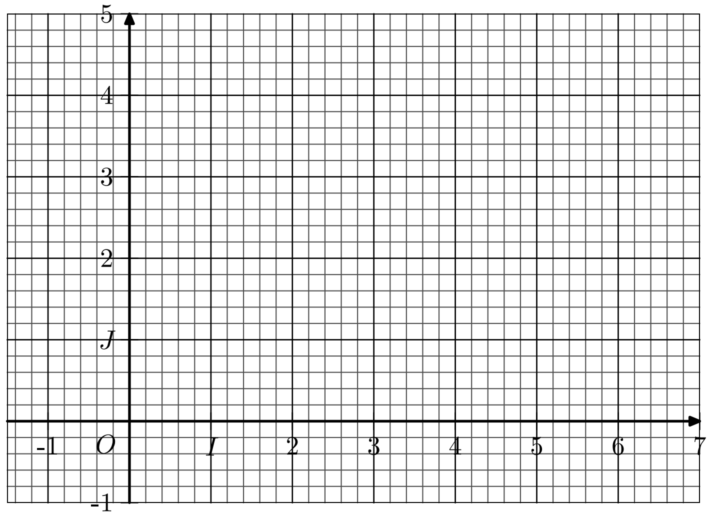
position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (d).

3 a établir l'égalité suivante :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{2h}{2\cdot(h+2)\cdot\left[2\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2}\cdot(h+2)\right]}$$

b En déduire la valeur du nombre dérivé $f'(1)$.

4 Tracer dans le repère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$.

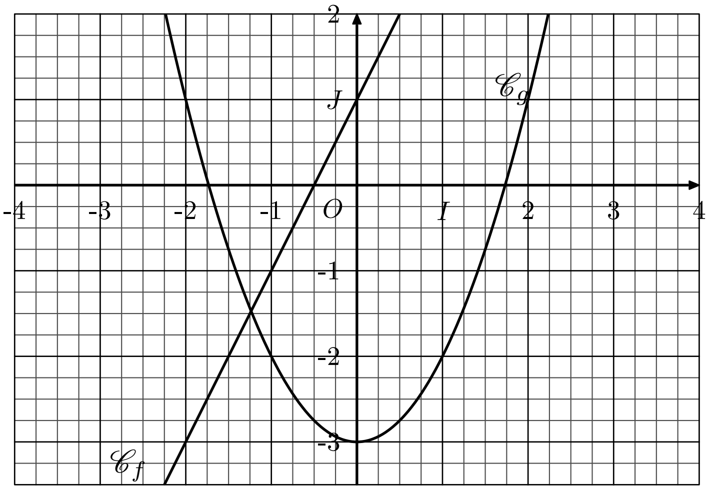


18. *Composée de fonctions*

E.70 On considère les deux fonctions f et g définie sur $\big[-4\,;4\big]$ par les relations :

$f(x) = 2x+1 \quad ; \quad g(x) = x^2-3$

On donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ ci-dessous :



1 Par lecture graphique, compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

2 On considère le programme de calcul suivant :

- Prendre un nombre x ;
- Déterminer l'image de x par la fonction f ; on note ce nombre x' ;
- Déterminer l'image de x' par la fonction g ; on note ce nombre $g\big(f(x)\big)$.

On peut noter ce programme de calcul par la chaine :

$x \xhookrightarrow{f} f(x) \xhookrightarrow{g} g\big[f(x)\big]$

a Déterminer la valeur des expressions suivantes :

$g\big[f(-1)\big] \quad ; \quad g\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

b Compléter le tableau de valeurs suivant :

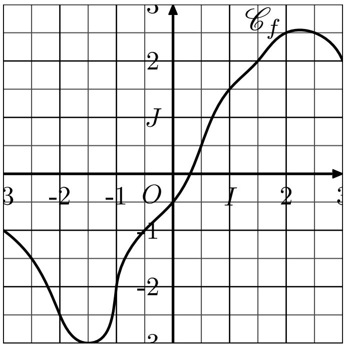
x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g\big(f(x)\big)$					

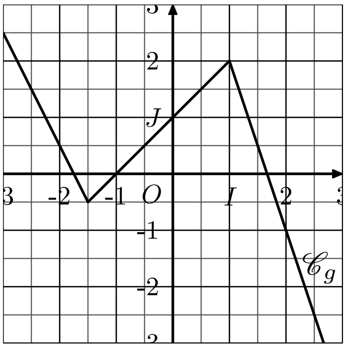
On vient de créer une nouvelle fonction qui à un nombre x associe l'image $g\big[f(x)\big]$. Cette fonction s'appelle la fonction composée de f par g et se note $g\circ f$.

3 Tracer dans le repère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_{g\circ f}$ représentative de la fonction $g\circ f$.

4 Donner l'expression, en fonction de x, de la fonction $g\circ f$.

E.71 On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3\,;3]$ dont les courbes, respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, représentatives sont données dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :





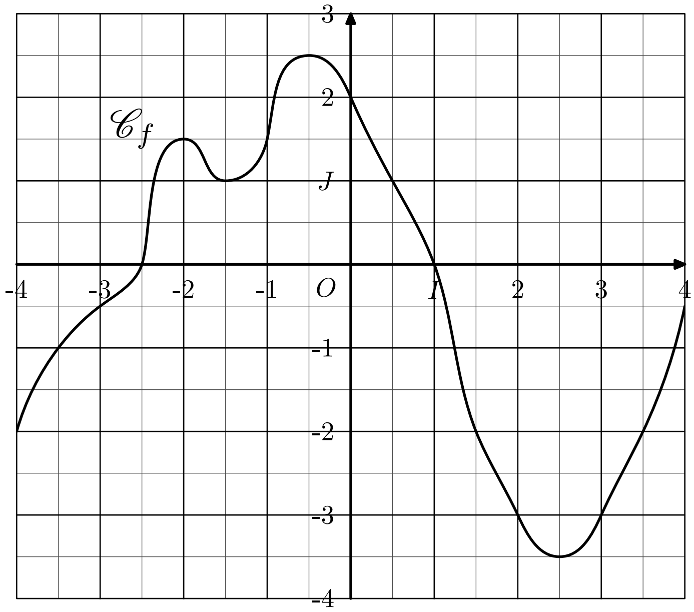
1. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

   a. $(f{\circ}g)(-2)$ b. $(f{\circ}g)(1{,}5)$ c. $(f{\circ}g)(2)$

2. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

   a. $(g{\circ}f)(-3)$ b. $(g{\circ}f)(0)$ c. $(g{\circ}f)(1)$

E.72 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. Calculer les images suivantes :

   a. $(f \circ f)(1)$ b. $(f \circ f)(-2)$ c. $(f \circ f)(3)$

2. On définit la fonction f^n comme la fonction composée n fois de la fonction f par elle-même. Déterminer la valeur des images suivantes :

   a. $f^3(1)$ b. $f^3(-3)$ c. $f^4(-1)$

E.73 Pour chaque question, déterminer une expression "*simplifiée*" de l'expression de la composée $f{\circ}g$ de la fonction g par la fonction f :

a. $f(x) = 2x^2 - x + 1$; $g(x) = 3x - 2$

b. $f(x) = \sqrt{x-2}$; $g(x) = 4x^2 + 12x + 11$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$

d. $f(x) = x^2 - x + 1$; $g(x) = \sqrt{x}$

e. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

19. *Limites de composées de fonctions*

E.74 Pour chaque question, déterminer la limite de $g{\circ}f$ en a :

a. $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$; $g(x) = \dfrac{5-x}{x^2}$; $a = 3$

b. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+3}}$; $g(x) = \sqrt{x{+}1} - \sqrt{x}$; $a = -3$

c. $f(x) = \dfrac{\cos x - 2}{x}$; $g(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^3 + x^2}$; $a = +\infty$

E.75 On considère les fonctions numériques f et g dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-1		3		4		$+\infty$
Variation de f	‖ 0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Variation de g	$-\infty$	↗	3	↘	1 ‖ $+\infty$	↘	4

1. Préciser l'ensemble de définition pour chacune de ces deux fonctions.
2. Justifier que la fonction f admet un unique zéro.
3. Déterminer et justifier la valeur des limites suivantes :
   a. $\lim\limits_{x \mapsto 4^-} (g \circ f)(x)$ b. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (g \circ f)(x)$
   c. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (g \circ f \circ g)(x)$ d. $\lim\limits_{x \mapsto -1} (f \circ g)(x)$

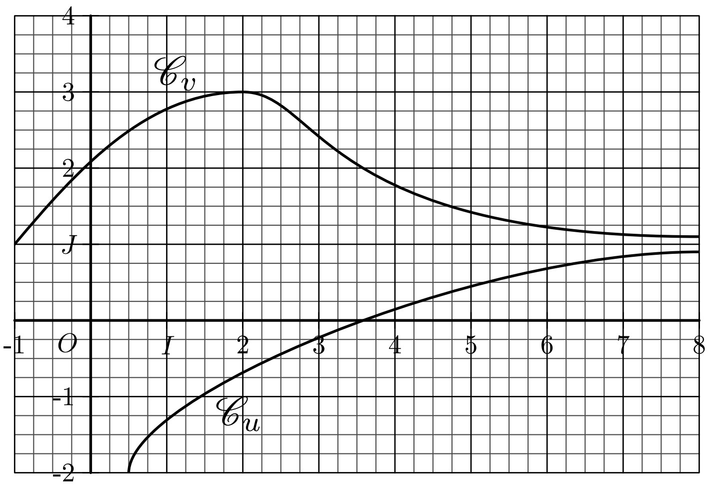
E.76 Soit f une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ vérifiant :
$f(0) = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par la relation :
$g(x) = \dfrac{1}{x} \cdot f\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$

1. Déterminer la limite de la fonction g en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g. Quelles conséquences peut-on déduire des deux questions précédentes pour la courbe $\mathscr{C}$?

20. *Limites et comparaisons*

E.77 On considère les deux fonctions numériques u et v définies sur $\mathbb{R}$ dont les courbes représentatives $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ sont données dans le repère ci-dessous :



1. Dans le repère ci-dessus, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$
2. Supposons que les fonctions u et v admettent les limites suivantes :
   $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = 1 \quad ; \quad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} v(x) = 1$
   Faire une conjecture quant à la limite de la fonction f en $+\infty$.

E.78 On considère la fonction f définie par la relation :
$f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 2 - \cos x}$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. a. Établir l'encadrement suivant :
   $\dfrac{5}{x^2+3} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{5}{x^2+1}$
   b. En déduire la valeur de la limite suivante :
   $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)$

E.79 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{x + \sin(x)}{x}$ b. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x \cdot \dfrac{2 + \cos x}{4} + \sin x$

E.80 Déterminer la valeur de la limite ci-dessous :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{3 + \cos x}{1 + x}$

21. *Fonction exponentielle et limite aux bornes*

E.81 Déterminer les valeurs des limites suivantes :

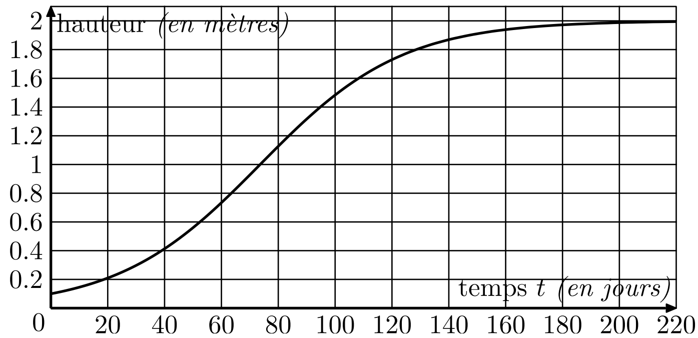
a. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \mathrm{e}^{-x+1}$ b. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \mathrm{e}^{2x+1}$ c. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \mathrm{e}^{-x^2+1}$

d. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ e. $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ f. $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

E.82 Établir la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x-1} = -\infty$ b. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^{2x} - 1} = \dfrac{1}{2}$

E.83 On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-dessous représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.



On décide de modéliser cette croissante par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1+b{\cdot}\mathrm{e}^{-0{,}04\cdot t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure $0{,}1\,m$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de $2\,m$.

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

E.84 Soit f la fonction définie par la relation :

$$f(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+1}$$

1. Justifier que la fonction f admet $\mathbb{R}$ comme ensemble de définition.
2. Déterminer la valeur des limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Établir que la fonction f' admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{x}{\cdot}\big(\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^{x}+1\big)}{\big(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+1\big)^2}$$

E.85 On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \frac{4{\cdot}\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+7}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Vérifier que pour tout réel x : $\quad f(x)=\dfrac{4}{1+7\mathrm{e}^{-x}}$
2. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
   b. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   c. Démontrer que pour tout réel x : $\quad 0<f(x)<4$.

22. *Fonction exponentielle et comparaison de croissance*

E.86 Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{x^2}{\cdot}\mathrm{e}^{-x}$
b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{x}{\cdot}\big(x^2-x+1\big)$
c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}+1}{\mathrm{e}^{-x}-1}$
d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{x^2+1}$
e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{-x}+3x+1$
f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x}$

E.87 Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} (x+1){\cdot}\mathrm{e}^{x}$
b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$
c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x+1}{\mathrm{e}^{x}}$
d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{2x}-3{\cdot}\mathrm{e}^{x}+1$
e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{2x}-3{\cdot}\mathrm{e}^{x}+1$
f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$

E.88 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}$$

Le but de cet exercice est de déterminer les deux limites suivantes : $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-} f(x)$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^+} f(x)$

1. Soit $X=\dfrac{2}{x-1}$. Prouver l'égalité :
$$\frac{2}{(x-1)^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{e}{2}\cdot X^2\cdot\mathrm{e}^{X}$$
2. En déduire la valeur des limites recherchées.

23. *Limites par identification aux nombres dérivées*

E.89 Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}$
b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{x}$
c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} x{\cdot}\big(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\big)$
d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} x{\cdot}\big(\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}-1\big)$
e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} x^3{\cdot}\big(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\big)$

E.90

1. On considère la suite (u_n) définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :
$$u_n = 1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}$$
Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Déterminer les limites suivantes :

   a. $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x \cdot e^{-x}}{x^2+1}$ b. $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} x^2 - 2(x-1)e^{x-1}$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot (x^2 + x)$$
Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction f.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$

   Peut-on prolonger g sur $\mathbb{R}$ par continuité.

24. *Suites et fonctions*

E.91 On se propose de montrer que les relations :
$$u_0 = -3 \quad ; \quad u_n = \frac{u_{n-1} - 8}{2 \cdot u_{n-1} - 9} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$
définissent bien une suite et que cette suite est convergente.

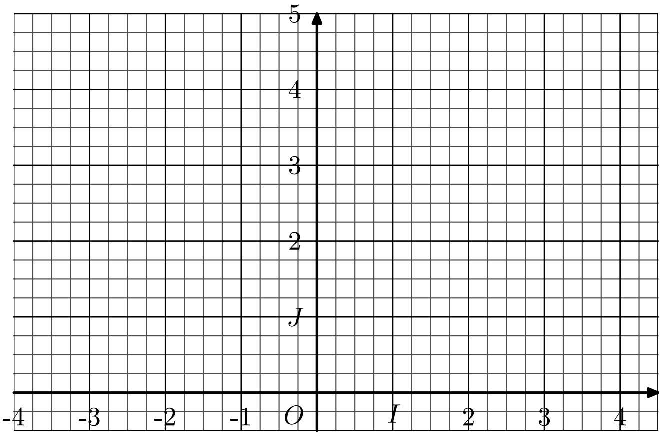
1. On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty ; \frac{9}{2}\right[$ par :
$$f(x) = \frac{x-8}{2x-9}$$
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

   a. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
   Citer les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.

   b. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   En déduire le tableau de variations de la fonction f.

   c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

   d. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous, ainsi que de la droite d'équation $y = x$:



   e. En se servant de ce graphique, faire une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).

2. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 1$.

3. Démontrer que la suite est croissante et qu'elle converge.
(On ne demande pas la valeur de la limite)

E.92 *On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.*

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$:
$$u_{n+1} = \frac{1}{10} \cdot u_n \cdot (20 - u_n)$$

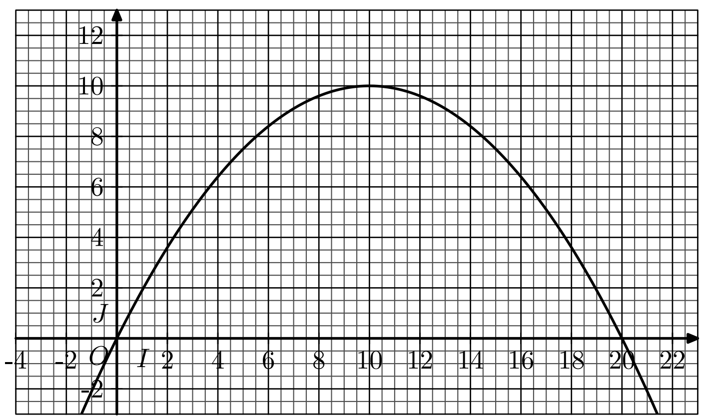
1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 20]$ par :
$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot x \cdot (20 - x)$$

   a. En déduire que pour tout $x \in [0 ; 20]$: $f(x) \in [0 ; 10]$.

   b. On donne en annexe la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé.
   Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente. *(on ne demande pas la valeur de sa limite).*



E.93 On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = 1{,}4\cdot v_n - 0{,}05\cdot {v_n}^2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1{,}4x - 0{,}05\cdot x^2$
   a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;8]$.
   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8$
2. Établir la convergence de la suite (v_n) *(on ne demandera pas la valeur de la limite).*

E.94 On considère la fonction f définit sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{1}{8}\cdot x^2 + \dfrac{1}{2}\cdot x + \dfrac{1}{2}$

1. Montrer que si $x\in[0\,;2]$ alors $f(x)\in[0\,;2]$
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On définit la suite (u_n) par :

   $u_0=\dfrac{1}{2}$; $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   Établir la convergence de la suite (u_n) *(on ne demande pas la valeur de la limite).*

25. *Cours*

E.95 Établir les deux limites suivantes :

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$; $\lim\limits_{n\mapsto-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

E.96

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

Démontrer que : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\cdot\mathrm{e}^{-x}=0$

E.97 On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et tel que $\lim\limits_{x\mapsto0} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=+\infty$.

On admet que l'on peut définir sur $\mathbb{N}$ une suite (β_n) de réels tels que $g(\beta_n)=n$, et que cette suite est strictement croissante.

Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$.

26. *Partage*

E.98 On considère la fonction f définie par :

$f : x \longmapsto \dfrac{5x+1}{-5x^2+4x+1}$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. a. Justifier que les deux limites ci-dessous représentent une forme indéterminée :

   $\lim\limits_{x\mapsto-\frac{1}{5}^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\frac{1}{5}^+} f(x)$.

   b. Montrer que, pour $x\in\mathcal{D}_f$, on a : $f(x)=-\dfrac{1}{x-1}$.
   c. En déduire la valeur des deux limites présentées à la question a.

27. *Exercices non-classés*

E.99 Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a + 2b - 4c = 4 \\ 2a - b + c = -8 \\ -3a - 2b + c = -3 \end{cases}$$

E.100 On considère la fonction f définie sur $]-3\,;+\infty[$ par :

$f\colon x \longmapsto \dfrac{x^2+2x+1}{\sqrt{x+3}}$

1. Montrer que le nombre dérivé de f en x s'écrit :

   $f'(x) = \dfrac{3\cdot x^2+14\cdot x+11}{2(x+3)\sqrt{x+3}}$
2. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
4. Donner le minimum de la fonction f sur son ensemble de définition.