

# Terminale Spécialité / Fonctions trigonométriques

## 1. Rappels

**E.1** À l'aide des formules du cos et du sin des angles associés, exprimer en fonction de  $\cos x$  ou de  $\sin x$  les nombres suivants :

- a)  $\sin(3\pi+x)$       b)  $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$   
 c)  $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$       d)  $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$   
 e)  $\sin(\pi-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$   
 f)  $3 \cdot \sin(\pi+x) - 2 \cdot \sin(\pi-x) + 4 \cdot \sin(x-\pi)$

**E.2** Simplifier l'argument de chacune des expressions suivantes :

- a)  $\tan(x+\pi)$       b)  $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$       c)  $\cos(x-\pi)$   
 d)  $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$       e)  $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$       f)  $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

**E.3**

1) En remarquant que :  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

Déterminer les valeurs de  $\cos\frac{\pi}{12}$  et  $\sin\frac{\pi}{12}$ .

2) Déterminer les valeurs de :  $\cos\frac{7\pi}{12}$  ;  $\sin\frac{7\pi}{12}$

**E.4** Montrer la relation suivante :

$$\sin(a+b) \cdot \cos(a-b) = \sin a \cdot \cos a + \cos b \cdot \sin b$$

**E.5**

1) Dans chacune des cas, tracer un cercle trigonométrique et représenter chacun des ensembles suivants :

- a)  $\left\{ \cos x \mid x \in \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3} \right] \right\}$   
 b)  $\left\{ \sin x \mid x \in \left[ \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right] \right\}$

2) À l'aide d'un cercle trigonométrique, donner sans justification l'ensemble des solutions des inéquations suivantes dans l'intervalle  $]-\pi; \pi]$  :

- a)  $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$       b)  $\cos x \geq -\frac{1}{2}$       c)  $\cos x < 0$

**E.6** Résoudre, dans  $]-\pi; \pi]$ , les équations ci-dessous :

- a)  $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$       b)  $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$   
 c)  $\cos(2x) = \cos\frac{\pi}{4}$       d)  $\cos x = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

**E.7**

1) Simplifier l'expression suivante :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

2) Établir l'égalité suivante :

$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{(\sin 3x)^2}{\sin(2x) \cdot \sin(x)}$$

3) Résoudre, dans l'intervalle  $]-\pi; \pi]$  l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) = \cos\frac{\pi}{7}$$

## 2. Propriétés des fonctions sinus et cosinus

**E.8**

1) En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

2) En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ; préciser sa limite :

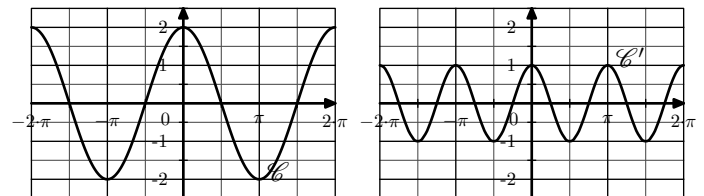
$$u_n = \frac{2n^2 + \cos n}{3n^2 + 5}$$

**E.9** On considère les deux fonctions suivantes  $f$

et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

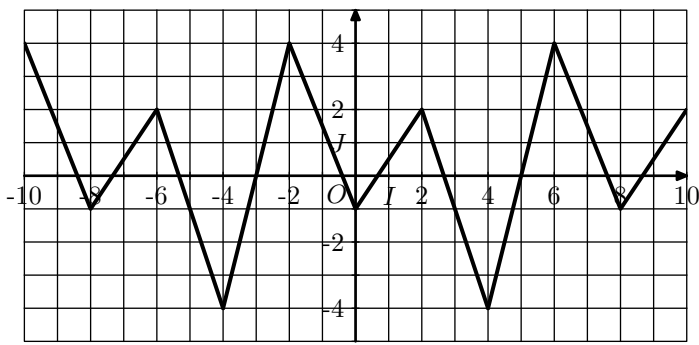
$$f(x) = 2 \cdot \cos(x) \quad ; \quad g(x) = \cos(2x)$$

Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative représentée ci-dessous :



## 3. Périodicité et parité

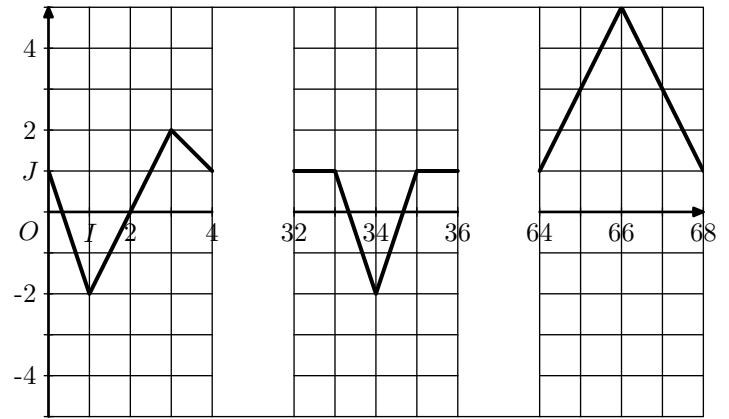
**E.10** Dans le repère  $(O; I; J)$  orthonormé, on représente ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  :



La fonction  $f$  est périodique de période  $T$ .

- Donner les coordonnées d'un vecteur définissant une translation par laquelle la courbe  $\mathcal{C}_f$  est invariante.
  - Déterminer la valeur de  $T$ .
- Donner l'image, par la fonction  $f$ , des nombres suivants :
  - 14
  - 16
  - 56
  - 58

**E.11** On considère la fonction  $f$  périodique de période 12. Ci-dessous sont données quelques parties de la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  :



- Reconstruire le tracé de  $\mathcal{C}_f$  sur l'intervalle  $[0; 12]$ .
- Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[38; 50]$ .

**E.12** Pour chaque question, montrer que la fonction  $f$  admet  $T$  pour période :

- $f(x) = \sin(6x-3)$  ;  $T = \frac{\pi}{3}$
- $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  ;  $T = \pi$
- $f(x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$  ;  $T = \pi$
- $f(x) = \left| \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \right|$  ;  $T = \frac{\pi}{2}$

## 4. Dérivée

**E.13** Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

- $f: x \mapsto x^2 + \cos x$
- $g: x \mapsto \sin(2x)$
- $h: x \mapsto \cos x \cdot \sin x$
- $j: x \mapsto (\sin x)^2$

**E.14** Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

- $f(x) = x^2 \cdot \cos x$
- $g(x) = (3x^2 - 2) \cdot (\sin x)^2$
- $h(x) = \frac{3}{2 \cdot \cos x}$
- $j(x) = \frac{\cos x}{3x + \sin x}$

## 5. Nombres dérivés et limites

**E.15** Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = (\cos x)^2$
  - $g(x) = \sin x + \cos x$
  - $h(x) = \tan(x^2 + x)$
  - $j(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

- Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^2 - 1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^2 + x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin x}$

**E.16** Considérons la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \sin x$

- Donner le nombre dérivé de la fonction  $g$  en 0.
- En déduire la valeur de la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

## 6. Etude de fonctions

**E.17** On considère les deux suites de nombres réels,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies par :

$$u_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2}$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

- Démontrer que la suite  $v$  converge vers  $\frac{1}{2}$ .
- Démontrer que chacune des trois fonctions numériques de la variable réelle :

$$x \mapsto x - \sin x \quad ; \quad x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

$$x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

On pourra utiliser les variations de chacune de ces trois fonctions.

- Justifier que pour tout  $n \geq 1$ :  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$ .  
Déduire du **a** l'inégalité:  
$$v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
- Démontrer que la suite  $u$  est convergente; quelle est sa limite?

## 7. Etude de fonctions et théorème des valeurs intermédiaires

**E.18** Préciser si l'affirmation suivante est vraie ou fautive, en justifiant la réponse.

### Affirmation

L'équation  $x - \cos x = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .

## 8. Primitive et intégrale

**E.19** Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} \quad \text{b) } g(x) = e^{x+1} + 1$$

$$\text{c) } h(x) = 2 \cdot x \cdot e^{x^2+1} \quad \text{d) } j(x) = \cos x$$

$$\text{e) } k(x) = \sin(3x) \quad \text{f) } \ell(x) = (\sin x)^2$$

**E.20** On considère les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi (\cos x)^2 dx \quad ; \quad J = \int_0^\pi (\sin x)^2 dx$$

- Calculer:  $I+J$  ;  $I-J$ .
  - En déduire les valeurs de  $I$  et de  $J$ .
- E.21** On considère la suite  $(x_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cdot \cos t dt$$

- Montrer que la suite  $(x_n)$  est à termes positifs.
  - Étudier les variations de la suite  $(x_n)$ .
  - Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite  $(x_n)$ ?
- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul:  
$$x_n \leq \frac{1}{n+1}$$
  - En déduire la limite de la suite  $(x_n)$ .

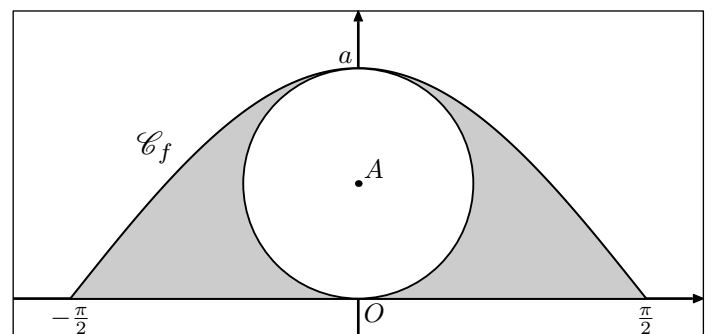
**E.22** Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles.




Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $y = a \cdot \cos x$  avec  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  et  $a$  un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point  $A$  de coordonnées  $(0; \frac{a}{2})$  et de rayon  $\frac{a}{2}$ . On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe  $\mathcal{C}$  pour des valeurs de  $a$  inférieures à 1,4.

- Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation  $x = -\frac{\pi}{2}$  et  $x = \frac{\pi}{2}$ , et la courbe  $\mathcal{C}$  est égale à  $2 \cdot a$  d'unité d'aire.
- Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur, arrondie au millième, faut-il donner au réel  $a$  pour respecter cette contrainte?

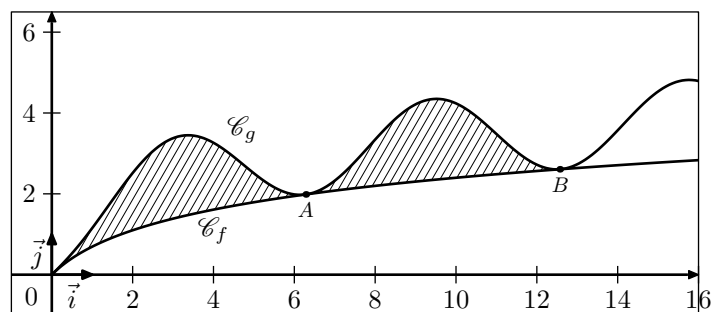


**E.23**    On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[0; 16]$  par :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad ; \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x)$$




Dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ .

Ces courbes sont données ci-dessous :



Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

## 9. Annales

**E.24**    Le plan est rapporté à un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = e^{-x} \cdot \cos(4x)$$

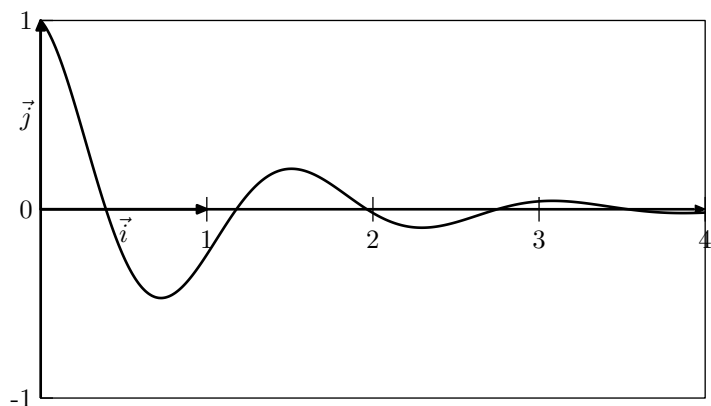
et  $\Gamma$  sa courbe représentative tracée dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  en fin d'exercice. Ce graphique sera complété au fur et à mesure de l'exercice.




On considère également la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = e^{-x}$  et on nomme  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1 a) Montrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$  :  

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$$
  - b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- 2 Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes  $\Gamma$  et  $\mathcal{C}$ .
- 3 On définit la suite  $(u_n)$  sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = f\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ .
  - a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique. En préciser la raison.
  - b) En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et étudier sa convergence.
- 4 a) Montrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$  :  

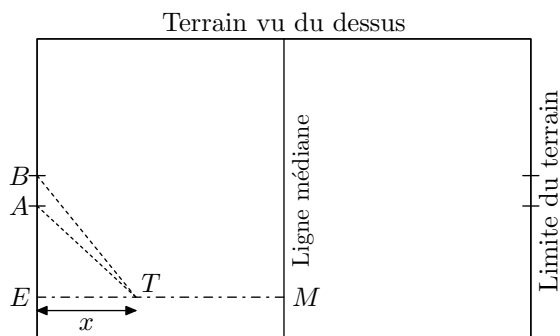
$$f'(x) = -e^{-x} \cdot [\cos(4x) + 4 \cdot \sin(4x)]$$
  - b) En déduire que les courbes  $\Gamma$  et  $\mathcal{C}$  ont même tangente en chacun de leurs points communs.
- 5 Donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près par excès du coefficient directeur de la droite  $\mathcal{T}$  tangente à la courbe  $\Gamma$  au point d'abscisse  $\frac{\pi}{2}$ .  
 Compléter le graphique donné en y traçant  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{C}$ .



**E.25**    Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point  $E$  (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment  $[AB]$ .

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point  $T$  que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment  $[EM]$  perpendiculaire à la droite  $(AB)$  sauf en  $E$ .

La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points  $A$  et  $B$  sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point  $T$  qui rend l'angle  $\widehat{ATB}$  le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point  $T$  sur le segment  $[EM]$  pour laquelle l'angle  $\widehat{ATB}$  est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note  $x$  la longueur  $ET$ , qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes :

$$EM = 50 \text{ m} \quad ; \quad EA = 25 \text{ m} \quad ; \quad AB = 5,6 \text{ m}$$

On note  $\alpha$  la mesure en radian de l'angle  $\widehat{ETA}$ ,  $\beta$  la mesure en radian de l'angle  $\widehat{ETB}$  et  $\gamma$  la mesure en radian de l'angle  $\widehat{ATB}$ .

- ① En utilisant les triangles rectangles  $ETA$  et  $ETB$  ainsi que les longueurs fournies, exprimer  $\tan \alpha$  et  $\tan \beta$  en fonction de  $x$ .

La fonction tangente est définie sur l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$  par :  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

- ② Montrer que la fonction  $\tan$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ .

- ③ L'angle  $\widehat{ATB}$  admet une mesure  $\gamma$  appartenant à l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ , résultat admis ici que l'on peut observer sur la figure.

On admet que pour tous réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$  :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$

Montrer que :  $\tan \gamma = \frac{5,6 \cdot x}{x^2 + 765}$

- ④ L'angle  $\widehat{ATB}$  est maximum lorsque sa mesure  $\gamma$  est maximale. Montrer que cela correspond à un maximum sur l'intervalle  $]0; 50[$  de la fonction  $f$  définie par :

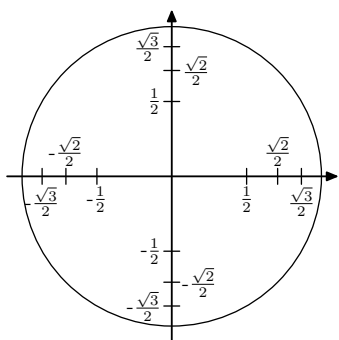
$$f(x) = \frac{5,6 \cdot x}{x^2 + 765}$$

Montrer qu'il existe une unique valeur de  $x$  pour laquelle l'angle  $\widehat{ATB}$  est maximum et déterminer cette valeur de  $x$  au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle  $\widehat{ATB}$  à 0,01 radian près.

## 10. Equations

**E.26**   

Dans le plan muni d'un repère  $(O; I; J)$ , on considère le cercle trigonométrique représenté ci-dessous :



- ① a) Sur le cercle trigonométrique, placer les deux points  $M$  et  $M'$  ayant pour abscisse  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

- b) Dans l'intervalle des mesures principales, résoudre l'équation :




$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- ② Dans l'intervalle des mesures principales, résoudre les équations suivantes :

a)  $\sin x = \frac{1}{2}$       b)  $\cos x = \frac{1}{2}$       c)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

- ③ Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation suivante :

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**E.27**    Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$       b)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**E.28**   




- ① Résoudre dans l'ensemble  $] -\pi; \pi ]$  des mesures principales, les équations suivantes :

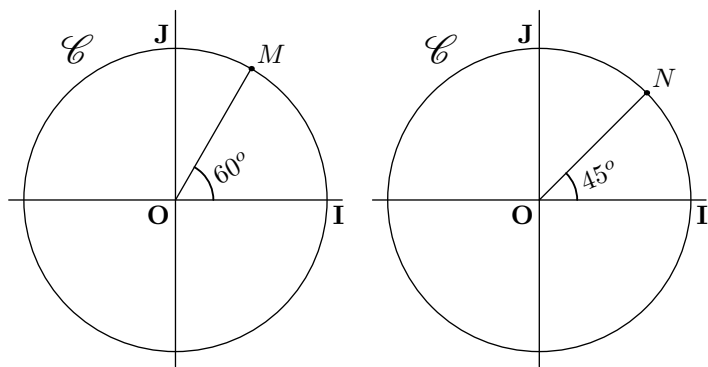
a)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$       b)  $\sin x = -\frac{1}{2}$

c)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$       d)  $\cos x = -\frac{1}{2}$

- ② Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$       b)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**E.29**    On considère les deux cercles trigonométriques ci-dessous :



- 1 Donner, dans le repère  $(O; I; J)$ , les coordonnées des points  $M$  et  $N$ .
- 2 Dans l'intervalle  $]-180^\circ; 180^\circ]$ , résoudre les équations suivantes :
  - a  $\cos x = \frac{1}{2}$
  - b  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  - c  $\sin x = -\frac{1}{2}$
- 3 Dans l'intervalle  $]-180^\circ; 180^\circ]$ , résoudre les équations suivantes :
  - a  $\sin x = \frac{1}{2}$
  - b  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  - c  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 4 Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de chacune des équations précédentes, si on cherche la mesure des angles dans l'ensemble  $\mathbb{R}$ ?

## 11. Equations

**E.30**   




- 1 On considère l'équation :  $(E): \sin(x) = \frac{1}{2}$   
Justifier que chaque élément de l'ensemble :

$$\left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{13 \cdot \pi}{6}; \frac{25 \cdot \pi}{6}; \frac{37 \cdot \pi}{6} \right\}$$




est une solution de l'équation  $(E)$ .

- 2 On considère l'équation :  $(F): \cos(2 \cdot x) = \frac{1}{2}$ 
  - a Justifier que chaque élément de l'ensemble  $\left\{ -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right\}$  est une solution de l'équation  $(F)$ .
  - b Pour tout entier relatif  $k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), justifier que les nombres  $-\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$  et  $\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$  sont solutions de l'équation  $(F)$ .
  - c En déduire les valeurs des quatre solutions de




l'équation  $(F)$  appartenant à l'intervalle des mesures principales  $]-\pi; \pi]$ .

**E.31**    Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle  $]-\pi; \pi]$  des mesures principales :

$$\text{a) } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{b) } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**E.32**    Dans l'intervalle  $]-\pi; \pi]$  des mesures principales, résoudre les deux équations suivantes :

$$\text{a) } \cos(2 \cdot x) = \frac{1}{2} \quad \text{b) } \sin(2 \cdot x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**E.33**    Résoudre, dans l'intervalle  $]-\pi; \pi]$ , les équations suivantes :

$$\text{a) } \sin(2 \cdot x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{b) } \cos\left(3 \cdot x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$