Terminale Spécialité / Fonctions trigonométriques

1. Rappels

E.1 À l'aide des formules du cos et du sin des angles associés, exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ les nombres suivants :

(a) $\sin(3\pi+x)$ (b) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$

(c) $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ (d) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

(e) $\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

(f) $3\cdot\sin(\pi+x)-2\cdot\sin(\pi-x)+4\cdot\sin(x-\pi)$

E.2 Simplifier l'argument de chacune des expressions suivantes :

(a) $\tan(x+\pi)$ (b) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ (c) $\cos(x-\pi)$

(d) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ (e) $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ (f) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

E.3

(1) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}=0$

(2) Simplifier au maximum le nombre suivant. *(on exprimera le résultat à l'aide de* $\cos\frac{\pi}{7}$ *et* $\sin\frac{\pi}{7}$*).*

$$2\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+3\cdot\cos\frac{8\pi}{7}-2\cdot\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$$

E.4

(1) En remarquant que : $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$

Déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

(2) Déterminer les valeurs de : $\cos\frac{7\pi}{12}$; $\sin\frac{7\pi}{12}$

E.5 Montrer la relation suivante :

$$\sin(a+b)\cdot\cos(a-b)=\sin a\cdot\cos a+\cos b\cdot\sin b$$

E.6 Déterminer une simplification des expressions suivantes :

(1) $\cos 2x\cdot\cos x-\sin 2x\cdot\sin x$

(2) $\sin 3x\cdot\cos 2x-\sin 2x\cdot\cos 3x$

E.7

(1) Dans chacune des cas, tracer un cercle trigonométrique et représenter chacun des ensembles suivants :

(a) $\left\{\cos x \mid x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right]\right\}$

(b) $\left\{\sin x \mid x\in\left[\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right]\right\}$

(2) À l'aide d'un cercle trigonométrique, donner sans justification l'ensemble des solutions des inéquations suivantes dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$:

(a) $\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\cos x\geqslant-\frac{1}{2}$ (c) $\cos x<0$

E.8 Résoudre, dans $]-\pi;\pi]$, les équations ci-dessous :

(a) $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$ (b) $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

(c) $\cos(2x)=\cos\frac{\pi}{4}$ (d) $\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

E.9

(1) Résoudre dans l'ensemble $]-\pi;\pi]$ des mesures principales, les équations suivantes :

(a) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\sin x=-\frac{1}{2}$

(c) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\tan x=-1$

E.10 Résoudre, dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

(a) $2\cos 2x=1$ (b) $\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\cos 2x=\cos x$ (d) $\sin 3x=\cos x$

E.11

(1) Simplifier l'expression suivante :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

(2) Établir l'égalité suivante :

$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{(\sin 3x)^2}{\sin(2x)\cdot\sin(x)}$$

(3) Résoudre, dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}$$

2. Propriétés des fonctions sinus et cosinus

E.12

(1) En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :

$$u_n=\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

(2) En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; préciser sa limite :

$$u_n = \frac{2n^2 + \cos n}{3n^2 + 5}$$

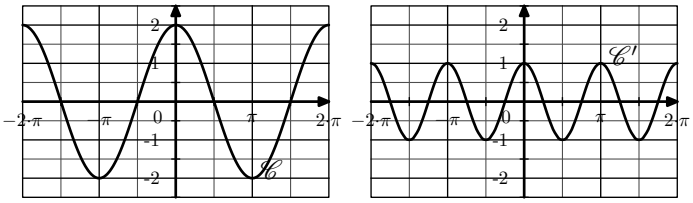
E.13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $u_n = \dfrac{\cos n - 2n}{\sqrt{n}}$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

E.14 On considère les deux fonctions suivantes f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2\cdot\cos(x)$; $g(x) = \cos(2\cdot x)$

Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative représentée ci-dessous :



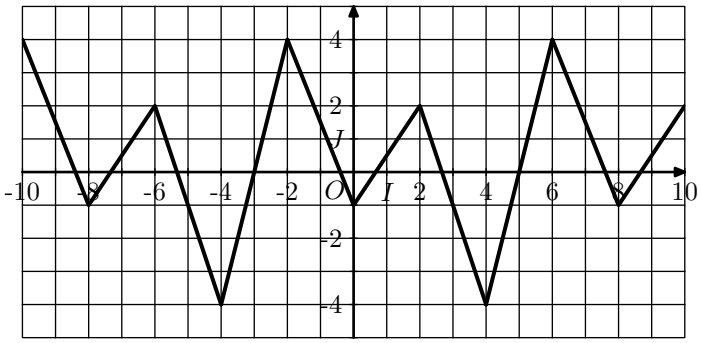
E.15 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non constante de réels. Pour tout entier n, on pose : $u_n = \sin(a_n)$.

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie :

Proposition : "On peut choisir la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$"

3. *Périodicité et parité*

E.16 Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on représente ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

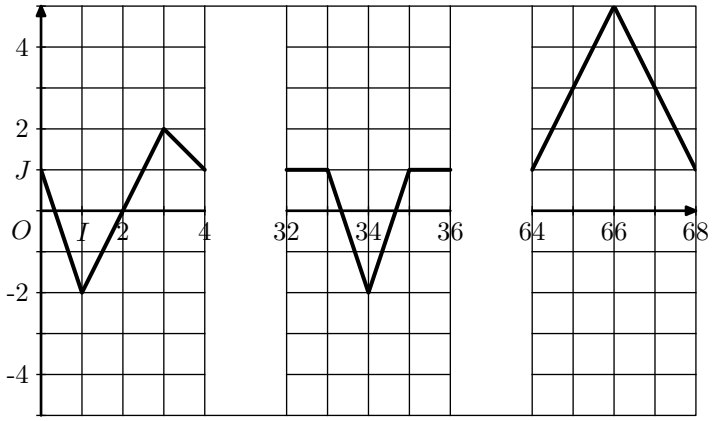


La fonction f est périodique de période T.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur définissant une translation par laquelle la courbe $\mathscr{C}_f$ est invariante.
   b. Déterminer la valeur de T.
2. Donner l'image, par la fonction f, des nombres suivants :

   a. 14 b. -16 c. 56 e. 58

E.17 On considère la fonction f périodique de période 12. Ci-dessous sont données quelques parties de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



1. Reconstruire le tracé de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;12]$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[38\,;50]$.

E.18 Pour chaque question, montrer que la fonction f admet T pour période :

a. $f(x) = \sin(6x-3)$; $T = \dfrac{\pi}{3}$

b. $f(x) = \tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; $T = \pi$

c. $f(x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$; $T = \pi$

d. $f(x) = \left|\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$; $T = \dfrac{\pi}{2}$

E.19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \cos x + \left[\cos(x)\right]^2$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Étudier la périodicité de la fonction f.
3. a. En étudiant les images des nombres suivantes :

$$0\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\ ;\ \frac{4\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{3}$$

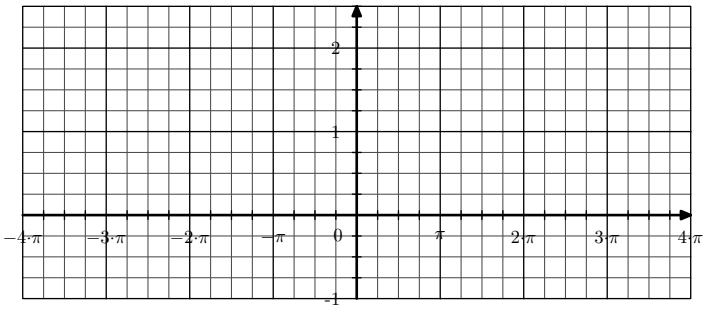
et en admettant les propriétés suivantes :

- f est strictement décroissante sur $\left[0\,;\frac{2\pi}{3}\right]$;
- f est strictement croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$;
- $\mathscr{C}_f$ admet les tangentes horizontales aux points d'abscisse :

$$0\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\ ;\ -\frac{4\pi}{3}$$

Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $\left[0\,;+\infty\right]$.

b. Prolonger ce tracé à l'ensemble du graphique.



4. Dérivée

E.20 Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f\colon x \longmapsto x^2 + \cos x$

b. $g\colon x \longmapsto \sin(2x)$

c. $h\colon x \longmapsto \cos x \cdot \sin x$

d. $j\colon x \longmapsto \left(\sin x\right)^2$

E.21 Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^2 \cdot \cos x$

b. $g(x) = \left(3x^2 - 2\right)\cdot\left(\sin x\right)^2$

c. $h(x) = \dfrac{3}{2\cdot\cos x}$

d. $j(x) = \dfrac{\cos x}{3x + \sin x}$

E.22 Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions f, g, h définies ci-dessous :

a. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

b. $g(x) = (5x-3)^3 \cdot \cos x$

c. $h(x) = \dfrac{\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)}{x^2}$

E.23 Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 2x \cdot \sin\left(3x+1\right)$

b. $g(x) = \dfrac{2\cdot\cos\left(2x\right)}{3 - \sin\left(1-2x\right)}$

5. Nombres dérivés et limites

E.24

1. Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \left(\cos x\right)^2$

b. $g(x) = \sin x + \cos x$

c. $h(x) = \tan(x^2+x)$

d. $j(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

2. Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{\left(\cos x\right)^2 - 1}{x}$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{\tan(x^2+x)}{x}$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin x}$

E.25 Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sin x$$

1. Donner le nombre dérivé de la fonction g en 0.
2. En déduire la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{\sin x}{x}$

6. Etude de fonctions

E.26

1. On considère la fonction f définit sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en 0.

2. On considère la fonction g définie par la relation sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = E(x)\cdot\sin\left(\pi\cdot x\right)$$

a. Simplifier l'écriture de la fonction g sur chacun des in-

tervalles suivants :

$[-1\,;0[\quad ;\quad [0\,;1[\quad ;\quad [1\,;2[$

(b) Justifier que la fonction g est continue en 0 et en 1.

(c) Émettre une conjecture sur l'ensemble de continuité de la fonction f?

(d) Tracer la courbe représentative de cette fonction sur votre calculatrice.

E.27 On considère les deux suites de nombres réels, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \cdots + \sin\frac{n}{n^2}$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

(1) Démontrer que la suite v converge vers $\frac{1}{2}$.

(2) (a) Démontrer que chacune des trois fonctions numériques de la variable réelle :

$$x \longmapsto x - \sin x \quad ; \quad x \longmapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

$$x \longmapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

On pourra utiliser les variations de chacune de ces trois fonctions.

(b) Justifier que pour tout $n \geqslant 1$: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \leqslant n^4$.

Déduire du (a) l'inégalité :

$$v_n - \frac{1}{6}\times\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

(c) Démontrer que la suite u est convergente ; quelle est sa limite?

E.28

(1) On désigne par g la fonction numérique définie sur $[0\,;\pi]$ par :

$$g(x) = x\cdot\cos x - \sin x$$

Étudier g et dresser son tableau de variation.

En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\pi]$.

(2) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0\,;\pi[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \quad \text{pour } x\in]0\,;\pi] \end{cases}$$

On rappelle que : $\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Étudier les variations de f sur $]0\,;\pi]$.

(3) Étude de f en 0.

(a) Prouver que, pour tout nombre réel $x\in[0\,;\pi]$:

$$0 \leqslant x - \sin x \leqslant \frac{x^3}{6}$$

(Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0\,;\pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

On calculera les dérivées φ', φ'' et φ''' et on en déduira le signe de φ)

(b) Prouver que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

(4) Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. *(On prendra 3 cm pour unité).*

E.29 On désigne par g la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par :

$$g(0) = 0 \quad ; \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\,;1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère la fonction composée h définie sur $]-\pi\,;0[$ par :

$$h(x) = g(\cos x)$$

(1) Démontrer que pour tout x de $]-\pi\,;0[$, on a $h'(x)=1$, où h' désigne la dérivée de h.

(2) Calculer $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

7. *Etude de fonctions et théorème des valeurs intermédiaires*

E.30 Préciser si l'affirmation suivante est vraie ou fasse, en justifiant la réponse.

Affirmation

L'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

8. *Primitive et intégrale*

E.31 Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \cos x + \sin x$

(b) $g(x) = \sin(3x)$

(c) $h(x) = \sin x\cdot\cos x$

(d) $j(x) = 3x\cdot\cos\left(x^2\right)$

E.32 Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

(b) $g(x) = \mathrm{e}^{x+1} + 1$

(c) $h(x) = 2\cdot x\cdot\mathrm{e}^{x^2+1}$

(d) $j(x) = \cos x$

(e) $k(x) = \sin(3x)$

(f) $\ell(x) = \left(\sin x\right)^2$

E.33 On considère les deux intégrales suivantes :

$$I=\int_0^{\pi}(\cos x)^2\,\mathrm{d}x \quad ; \quad J=\int_0^{\pi}(\sin x)^2\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer : $I+J$; $I-J$.
2. En déduire les valeurs de I et de J.

E.34 On considère la suite (x_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n=\int_0^1 t^n\cdot\cos t\,\mathrm{d}t$$

1. a. Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
   b. Étudier les variations de la suite (x_n).
   c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $x_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$
   b. En déduire la limite de la suite (x_n).

E.35 Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^2\,\mathrm{d}x$

E.36 On considère la fonction f définie sur $[0\,;\pi]$ par :

$$f(x)=\cos 3x\cdot(\cos x)^3$$

Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ *(on prendra 3 cm comme unité)*, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.

1. a. Montrer que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :
   $$f'(x)=-3\cdot(\cos x)^2\cdot\sin 4x$$
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. a. Montrer que, quel que soit le réel x appartenant à $[0\,;\pi]$, on a :
   $$f(x)=\frac{1}{8}\cdot\cos 6x+\frac{3}{8}\cdot\cos 4x+\frac{3}{8}\cdot\cos 2x+\frac{1}{8}$$
   (On utilisera entre autre la formule :
   $$2\cdot\cos x\cdot\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y))$$
   b. Calculer, en cm^2, l'aire de l'ensemble E limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{6}$.

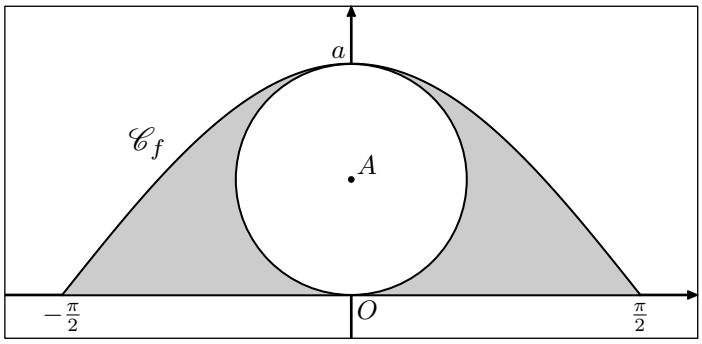
E.37 Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles.

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=a\cdot\cos x$ avec $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{a}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de a inférieurs à 1,4.

1. Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=-\dfrac{\pi}{2}$ et $x=\dfrac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à $2\cdot a$ d'unité d'aire.
2. Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur, arrondie au millième, faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte ?

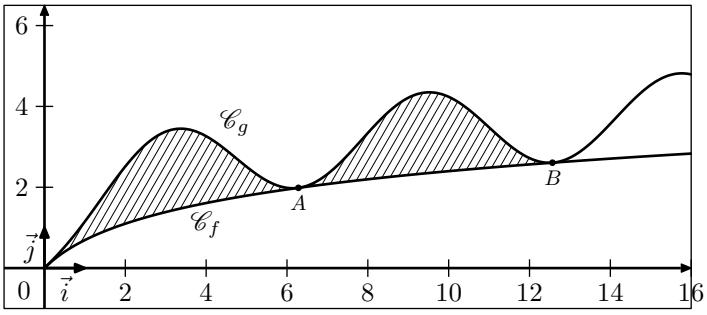


E.38 On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;16]$ par :

$$f(x)=\ln(x+1) \quad ; \quad g(x)=\ln(x+1)+1-\cos(x)$$

Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.

Ces courbes sont données ci-dessous :



Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

9. *Annales*

E.39 Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cdot\cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ en fin d'exercice. Ce graphique sera complété au fur et à mesure de l'exercice.

On considère également la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
   $$-\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant\mathrm{e}^{-x}$$
   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = f\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

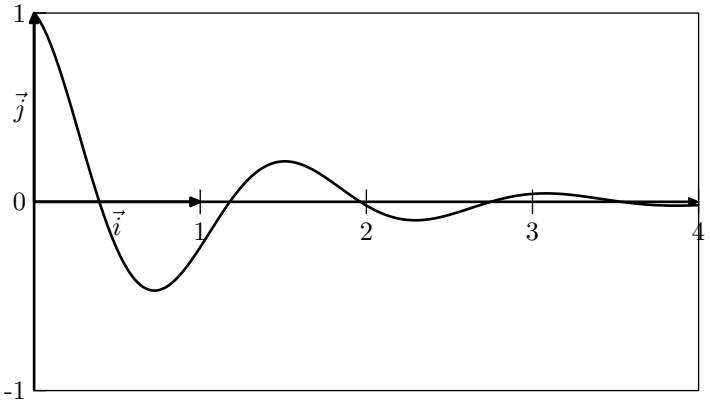
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
   $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \cdot [\cos(4x) + 4 \cdot \sin(4x)]$

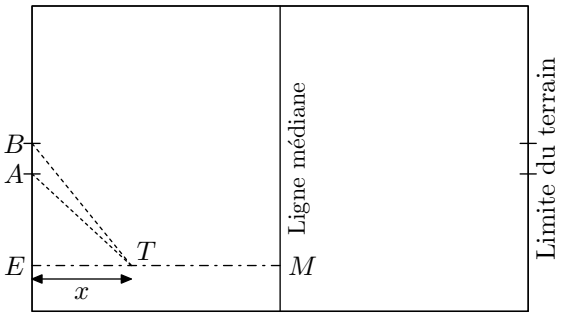
   b. En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
   Compléter le graphique donné en y traçant $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.



E.40 Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E *(voir figure ci-contre)* situé à l'extérieur du segment $[AB]$.
La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E.
La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Terrain vu du dessus



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes :
$EM = 50\,m$; $EA = 25\,m$; $AB = 5{,}6\,m$
On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

   La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici que l'on peut observer sur la figure.

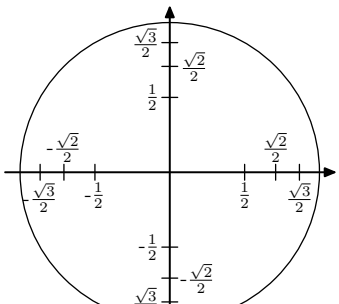
   On admet que pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$:
   $$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$
   Montrer que : $\tan\gamma = \frac{5{,}6 \cdot x}{x^2 + 765}$

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un maximum sur l'intervalle $]0\,;50[$ de la fonction f définie par :
   $$f(x) = \frac{5{,}6 \cdot x}{x^2 + 765}$$
   Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

10. *Equations*

E.41

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère le cercle trigonométrique représenté ci-dessous :



1. a. Sur le cercle trigonométrique, placer les deux points M et M' ayant pour abscisse $\sqrt{2}$

(b) Dans l'intervalle des mesures principales, résoudre l'équation :

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) Dans l'intervalle des mesures principales, résoudre les équations suivantes :

(a) $\sin x = \frac{1}{2}$ (b) $\cos x = \frac{1}{2}$ (c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

E.42 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

E.43

(1) Résoudre dans l'ensemble $]-\pi\,;\pi]$ des mesures principales, les équations suivantes :

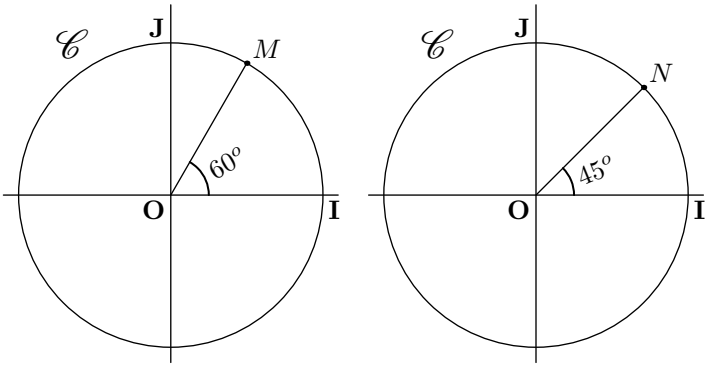
(a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\sin x = -\frac{1}{2}$

(c) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\cos x = -\frac{1}{2}$

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

E.44 On considère les deux cercles trigonométriques ci-dessous :



(1) Donner, dans le repère $(O\,;I\,;J)$, les coordonnées des points M et N.

(2) Dans l'intervalle $]-180^o\,;180^o]$, résoudre les équations suivantes :

(a) $\cos x = \frac{1}{2}$ (b) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\sin x = -\frac{1}{2}$

(3) Dans l'intervalle $]-180^o\,;180^o]$, résoudre les équations suivantes :

(a) $\sin x = \frac{1}{2}$ (b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de chacune des équations précédentes, si on cherche la mesure des angles dans l'ensemble $\mathbb{R}$?

11. *Equations*

E.45

(1) On considère l'équation : (E) : $\sin(x) = \frac{1}{2}$

Justifier que chaque élément de l'ensemble :

$$\left\{\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{13\cdot\pi}{6}\,;\,\frac{25\cdot\pi}{6}\,;\,\frac{37\cdot\pi}{6}\right\}$$

est une solution de l'équation (E).

(2) On considère l'équation : (F) : $\cos(2\cdot x) = \frac{1}{2}$

(a) Justifier que chaque élément de l'ensemble $\left\{-\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{6}\right\}$ est une solution de l'équation (F).

(b) Pour tout entier relatif k $(k\in\mathbb{Z})$, justifier que les nombres $-\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi$ et $\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi$ sont solutions de l'équation (F).

(c) En déduire les valeurs des quatre solutions de l'équation (F) appartenant à l'intervalle des mesures principales $]-\pi\,;\pi]$.

E.46 Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ des mesures principales :

(a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

E.47 Dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ des mesures principales, résoudre les deux équations suivantes :

(a) $\cos(2\cdot x) = \frac{1}{2}$ (b) $\sin(2\cdot x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

E.48 Résoudre, dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$, les équations suivantes :

(a) $\sin(2\cdot x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\cos\left(3\cdot x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$