Terminale Spécialité / Fonctions trigonométriques

1. Rappels

E.1 À l'aide des formules du cos et du sin des angles associés, exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ les nombres suivants :

(a) $\sin\left(3\pi+x\right)$ (b) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)$

(c) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ (d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$

(e) $\sin\left(\pi-x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

(f) $3\cdot\sin\left(\pi+x\right)-2\cdot\sin\left(\pi-x\right)+4\cdot\sin\left(x-\pi\right)$

E.2 Simplifier l'argument de chacune des expressions suivantes :

(a) $\tan\left(x+\pi\right)$ (b) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ (c) $\cos\left(x-\pi\right)$

(d) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ (e) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ (f) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

E.3

1. En remarquant que : $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$

   Déterminer les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2. Déterminer les valeurs de : $\cos\dfrac{7\pi}{12}$; $\sin\dfrac{7\pi}{12}$

E.4 Montrer la relation suivante :

$\sin(a+b)\cdot\cos(a-b)=\sin a\cdot\cos a+\cos b\cdot\sin b$

E.5

1. Dans chacune des cas, tracer un cercle trigonométrique et représenter chacun des ensembles suivants :

   (a) $\left\{\cos x \mid x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{2\pi}{3}\right]\right\}$

   (b) $\left\{\sin x \mid x\in\left[\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{7\pi}{3}\right]\right\}$

2. À l'aide d'un cercle trigonométrique, donner sans justification l'ensemble des solutions des inéquations suivantes dans l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$:

   (a) $\sin x\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\cos x\geqslant-\dfrac{1}{2}$ (c) $\cos x<0$

E.6 Résoudre, dans $\left]-\pi;\pi\right]$, les équations ci-dessous :

(a) $\cos x=\cos\dfrac{\pi}{4}$ (b) $\sin x=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(c) $\cos\left(2x\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}$ (d) $\cos x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

E.7

1. Simplifier l'expression suivante :

   $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

2. Établir l'égalité suivante :

   $$\frac{\sin 5x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{\left(\sin 3x\right)^2}{\sin(2x)\cdot\sin(x)}$$

3. Résoudre, dans l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$ l'équation suivante :

   $$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}$$

2. Propriétés des fonctions sinus et cosinus

E.8

1. En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :

   $$u_n=\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

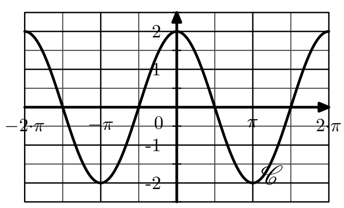
2. En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; préciser sa limite :

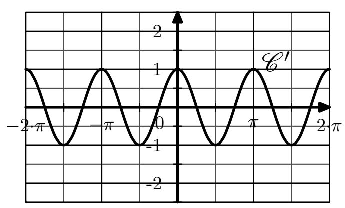
   $$u_n=\frac{2n^2+\cos n}{3n^2+5}$$

E.9 On considère les deux fonctions suivantes f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=2\cdot\cos\left(x\right)$; $g(x)=\cos\left(2\cdot x\right)$

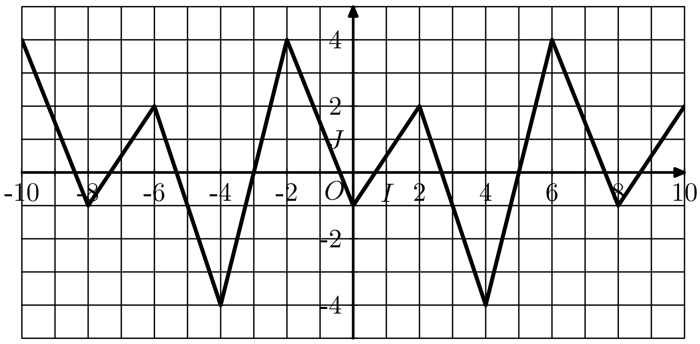
Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative représentée ci-dessous :





3. Périodicité et parité

E.10 Dans le repère $(O;I;J)$ orthonormé, on représente ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



La fonction f est périodique de période T.

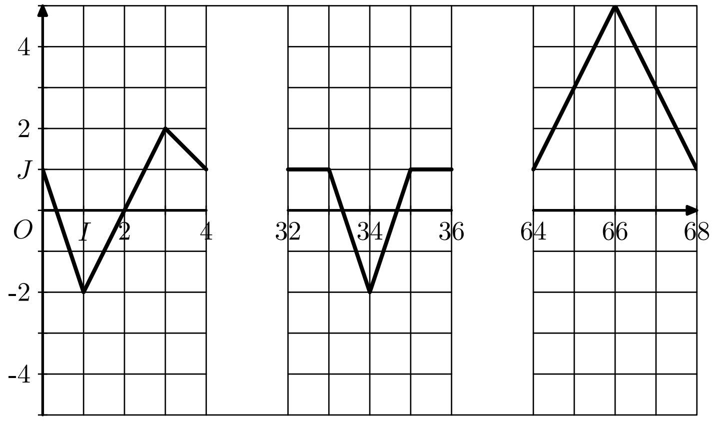
1. (a) Donner les coordonnées d'un vecteur définissant une translation par laquelle la courbe $\mathscr{C}_f$ est invariante.

   (b) Déterminer la valeur de T.

2. Donner l'image, par la fonction f, des nombres suivants :

   (a) 14 (b) -16 (c) 56 (e) 58

E.11 On considère la fonction f périodique de période 12. Ci-dessous sont données quelques parties de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



1. Reconstruire le tracé de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;12]$.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[38\,;50]$.

E.12 Pour chaque question, montrer que la fonction f admet T pour période :

(a) $f(x)=\sin\left(6x-3\right)$; $T=\dfrac{\pi}{3}$

(b) $f(x)=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; $T=\pi$

(c) $f(x)=\left(\cos x\right)^2-\left(\sin x\right)^2$; $T=\pi$

(d) $f(x)=\left|\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$; $T=\dfrac{\pi}{2}$

4. *Dérivée*

E.13 Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

(a) $f\colon x\longmapsto x^2+\cos x$ (b) $g\colon x\longmapsto \sin(2x)$

(c) $h\colon x\longmapsto \cos x\cdot\sin x$ (d) $j\colon x\longmapsto\left(\sin x\right)^2$

E.14 Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

(a) $f(x)=x^2\cdot\cos x$ (b) $g(x)=\left(3x^2-2\right)\cdot\left(\sin x\right)^2$

(c) $h(x)=\dfrac{3}{2\cdot\cos x}$ (d) $j(x)=\dfrac{\cos x}{3x+\sin x}$

5. *Nombres dérivés et limites*

E.15

1. Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions suivantes :

   (a) $f(x)=\left(\cos x\right)^2$ (b) $g(x)=\sin x+\cos x$

   (c) $h(x)=\tan(x^2+x)$ (d) $j(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

2. Déterminer les limites suivantes :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0}\frac{\left(\cos x\right)^2-1}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{x+\frac{\pi}{4}}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0}\frac{\tan(x^2+x)}{x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin x}$

E.16 Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\sin x$

1. Donner le nombre dérivé de la fonction g en 0.

2. En déduire la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0}\frac{\sin x}{x}$

6. *Etude de fonctions*

E.17 On considère les deux suites de nombres réels, $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(v_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \cdots + \sin\frac{n}{n^2}$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

1. Démontrer que la suite v converge vers $\frac{1}{2}$.

2. a. Démontrer que chacune des trois fonctions numériques de la variable réelle :

$$x \longmapsto x - \sin x \quad ; \quad x \longmapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

$$x \longmapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$.

On pourra utiliser les variations de chacune de ces trois fonctions.

b. Justifier que pour tout $n\geqslant 1$: $\quad 1^3+2^3+\cdots+n^3 \leqslant n^4$.

Déduire du a. l'inégalité :

$$v_n - \frac{1}{6}\times\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

c. Démontrer que la suite u est convergente ; quelle est sa limite?

7. *Etude de fonctions et théorème des valeurs intermédiaires*

E.18 Préciser si l'affirmation suivante est vraie ou fasse, en justifiant la réponse.

Affirmation

L'équation $x-\cos x=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

8. *Primitive et intégrale*

E.19 Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ b. $g(x) = \mathrm{e}^{x+1}+1$

c. $h(x) = 2{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{x^2+1}$ d. $j(x) = \cos x$

e. $k(x) = \sin(3x)$ f. $\ell(x) = \big(\sin x\big)^2$

E.20 On considère les deux intégrales suivantes :

$$I=\int_0^{\pi}\big(\cos x\big)^2\,\mathrm{d}x \quad ; \quad J=\int_0^{\pi}\big(\sin x\big)^2\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer : $\quad I+J \quad ; \quad I-J$.
2. En déduire les valeurs de I et de J.

E.21 On considère la suite $\big(x_n\big)$ définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n{\cdot}\cos t\,\mathrm{d}t$$

1. a. Montrer que la suite $\big(x_n\big)$ est à termes positifs.

b. Étudier les variations de la suite $\big(x_n\big)$.

c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite $\big(x_n\big)$?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

b. En déduire la limite de la suite $\big(x_n\big)$.

E.22 Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles.

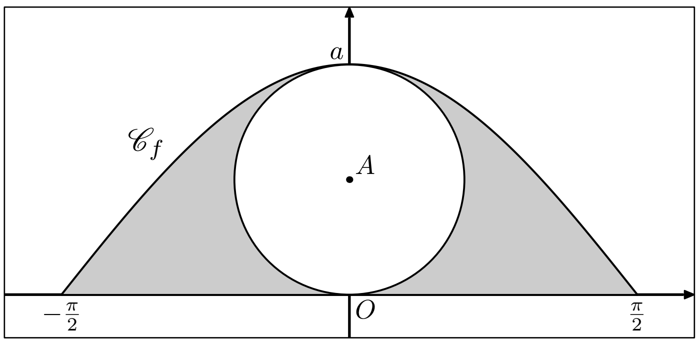
Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=a{\cdot}\cos x$ avec $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0\,;\frac{a}{2}\right)$ et de rayon $\frac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de a inférieurs à 1,4.

1. Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=-\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à $2{\cdot}a$ d'unité d'aire.

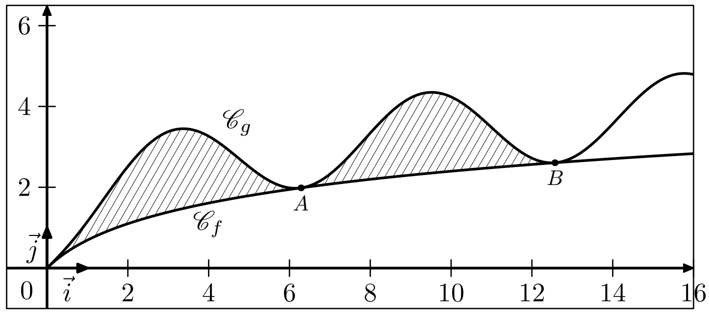
2. Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur, arrondie au millième, faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte?



E.23 On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;16]$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad ; \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x)$$

Dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
Ces courbes sont données ci-dessous :



Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

9. *Annales*

E.24 Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cdot\cos(4x)$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ en fin d'exercice. Ce graphique sera complété au fur et à mesure de l'exercice.

On considère également la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
   $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = f\left(n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

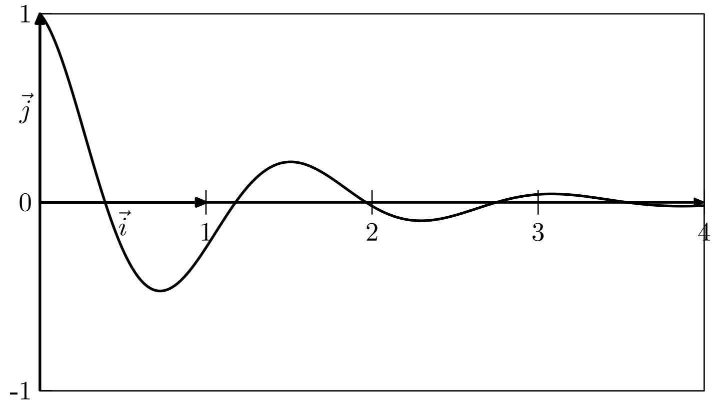
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
   $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cdot\left[\cos(4x) + 4\cdot\sin(4x)\right]$

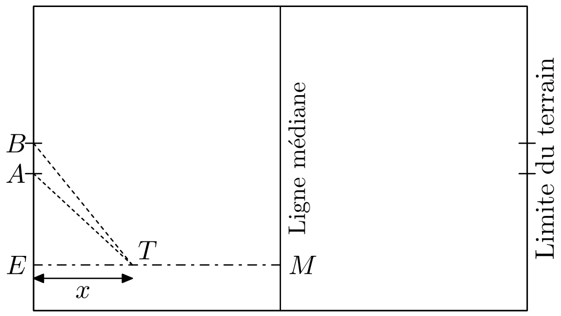
   b. En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
   Compléter le graphique donné en y traçant $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.



E.25 Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E *(voir figure ci-contre)* situé à l'extérieur du segment $[AB]$.
La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E.
La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Terrain vu du dessus



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes :
$EM = 50\,m$; $EA = 25\,m$; $AB = 5{,}6\,m$

On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

   La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici que l'on peut observer sur la figure.

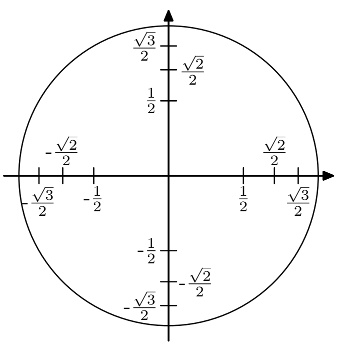
   On admet que pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$:
   $$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \times \tan b}$$
   Montrer que : $\tan\gamma = \dfrac{5{,}6\cdot x}{x^2+765}$

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un maximum sur l'intervalle $]0\,;50[$ de la fonction f définie par :
   $$f(x) = \frac{5{,}6\cdot x}{x^2+765}$$
   Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

10. *Equations*

E.26

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère le cercle trigonométrique représenté ci-dessous :



1. a. Sur le cercle trigonométrique, placer les deux points M et M' ayant pour abscisse $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   b. Dans l'intervalle des mesures principales, résoudre l'équation :
   $$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
2. Dans l'intervalle des mesures principales, résoudre les équations suivantes :
   a. $\sin x = \dfrac{1}{2}$ b. $\cos x = \dfrac{1}{2}$ c. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :
   $$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

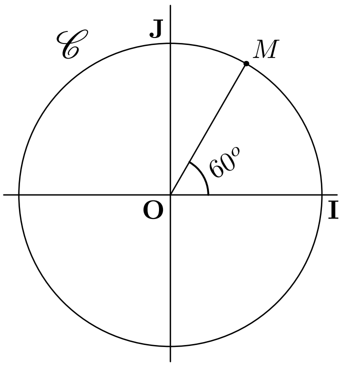
E.27 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

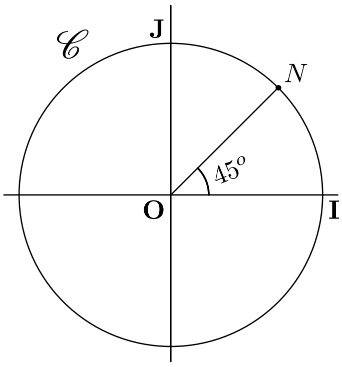
a. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

E.28

1. Résoudre dans l'ensemble $]-\pi\,;\pi]$ des mesures principales, les équations suivantes :
   a. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$
   c. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d. $\cos x = -\dfrac{1}{2}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

E.29 On considère les deux cercles trigonométriques ci-dessous :





1. Donner, dans le repère $(O\,;I\,;J)$, les coordonnées des points M et N.
2. Dans l'intervalle $\left]-180^o\,;180^o\right]$, résoudre les équations suivantes :
   a. $\cos x = \dfrac{1}{2}$ b. $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$
3. Dans l'intervalle $\left]-180^o\,;180^o\right]$, résoudre les équations suivantes :
   a. $\sin x = \dfrac{1}{2}$ b. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
4. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de chacune des équations précédentes, si on cherche la mesure des angles dans l'ensemble $\mathbb{R}$?

11. *Equations*

E.30

1. On considère l'équation : (E): $\sin(x)=\dfrac{1}{2}$
   Justifier que chaque élément de l'ensemble :
   $$\left\{\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{13\cdot\pi}{6}\,;\,\frac{25\cdot\pi}{6}\,;\,\frac{37\cdot\pi}{6}\right\}$$
   est une solution de l'équation (E).
2. On considère l'équation : (F): $\cos(2\cdot x)=\dfrac{1}{2}$
   a. Justifier que chaque élément de l'ensemble $\left\{-\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right\}$ est une solution de l'équation (F).
   b. Pour tout entier relatif k $(k\in\mathbb{Z})$, justifier que les nombres $-\dfrac{\pi}{6}+k\cdot\pi$ et $\dfrac{\pi}{6}+k\cdot\pi$ sont solution de l'équation (F).
   c. En déduire les valeurs des quatre solutions de l'équation (F) appartenant à l'intervalle des mesures principales $\left]-\pi\,;\pi\right]$.

E.31 Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales :

a. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

E.32 Dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales, résoudre les deux équations suivantes :

a. $\cos(2\cdot x) = \dfrac{1}{2}$ b. $\sin(2\cdot x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

E.33 Résoudre, dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$, les équations suivantes :

a. $\sin(2\cdot x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\cos\left(3\cdot x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

