# Terminale Spécialité / Limite de suites

## 1. Rappels : suites arithmétiques et géométriques

**E.1** On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{3}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de $(u_n)$ donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la valeur de la suite suivante :
   $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12}$

**E.2** On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{16}{27}$ et de raison $\frac{3}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de $(u_n)$ donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la valeur de la suite suivante :
   $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{16}$

**E.3**

1. Soit $(u_n)$ une suite arithmétique définie pour $n\in\mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :
   $u_4 = 3 \quad ; \quad u_7 = 15$
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de la suite $(u_n)$.
   b. Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite $(u_n)$
2. Soit $(v_n)$ une suite géométrique définie pour $n\in\mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :
   $v_2 = 2 \quad ; \quad v_5 = 54$
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de la suite $(v_n)$.
   b. Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite $(v_n)$

**E.4** On considère les deux suites de nombres ci-dessous dont on donne les sept premiers termes :

a. 3 ; 5 ; 7 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16

b. 6 ; 3,5 ; 1 ; -1,5 ; -4 ; -6,5 ; -9

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite arithmétique?
Si oui, donner le premier terme et la raison. Si non, justifier votre rejet de cette affirmation.

**E.5** On considère les deux suites de nombres ci-dessous où sont donnés les six premiers termes :

a. $8 \;;\; 4 \;;\; 2 \;;\; 1 \;;\; \frac{1}{2} \;;\; \frac{1}{4}$

b. 1 ; 3 ; 9 ; 18 ; 54 ; 162

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite géométrique?
Si oui, préciser le premier terme et la raison. Sinon, justifier votre rejet de la conjecture.

**E.6** En identifiant chacune des sommes comme une somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique, déterminer chacune de leurs valeurs :

a. $12 + 7 + 2 + (-3) + \cdots + (-28)$

b. $27 + 3 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{243}$

c. $\frac{2}{3} + \frac{8}{3} + \frac{14}{3} + \cdots + \frac{62}{3}$

d. $\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \cdots + \frac{1}{2^{24}}$

## 2. Rappels : autres

**E.7**

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$
   Déterminer la valeur des huit premiers termes de la suite $(u_n)$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$v_1 = 2 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{v_n} + n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   Déterminer les cinq premiers termes de la suite $(v_n)$.

**E.8** Déterminer la valeur de chacune des sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{i=0}^{7} i$ b. $\displaystyle\sum_{i=3}^{8} (i^2 - i)$ c. $\displaystyle\sum_{i=0}^{7} (i - 4)$

d. $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i}$ e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i^2}$ f. $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{3} \left[\sum_{i=0}^{\ell} i\right]$

**E.9** Justifier que, dans chaque question, les informations ci-dessous ne définissent pas de suites :

a. $u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = 2\cdot u_n - 3 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

b. $u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - 3 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

c. $u_0 = 3 \quad ; \quad u_n = 2\cdot u_{n-1} - 2 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

d. $u_0 = -1 \quad ; \quad u_n = \dfrac{u_{n-1} - 2}{u_{n-1} + 1} \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

 CC BY-NC

## 3. *Limites de suites arithmétiques et géométriques*

**E.10**

1. On considère la suite $(u_n)$ arithmétique de premier terme $-4$ et de raison $5$ :

   a. Compléter le tableau ci-dessous :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | $-4$ | 1 | 6 | 11 | 16 | 21 | | |

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme $u_n$ lorsque le rang $n$ devient de plus en plus grand ?
   On notera : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \ldots\ldots$

2. On considère la suite $(v_n)$ arithmétique de premier terme $3$ et de raison $-1{,}2$ :

   a. Compléter le tableau ci-dessous :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_n$ | 3 | 1,8 | 0,6 | $-0{,}6$ | $-1{,}8$ | $-3$ | | |

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme $v_n$ lorsque le rang $n$ devient de plus en plus grand ?
   On notera : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = \ldots\ldots$

**E.11**

1. On considère la suite $(u_n)$ géométrique de premier terme $4$ et de raison $2$ :

   a. Compléter le tableau ci-dessous :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | | |

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme $u_n$ lorsque le rang $n$ devient de plus en plus grand ?
   On notera : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \ldots\ldots$

2. On considère la suite $(v_n)$ géométrique de premier terme $81$ et de raison $\dfrac{1}{3}$ :

   a. Compléter le tableau ci-dessous :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_n$ | 81 | 27 | 9 | 3 | 1 | $\frac{1}{3}$ | | |

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme $v_n$ lorsque le rang $n$ devient de plus en plus grand ?
   On notera : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = \ldots\ldots$

**E.12** On considère la suite $(u_n)$ géométrique de premier terme $2{,}8$ et de raison $0{,}9$.

1. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous à l'aide de valeurs approchées au centième :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 2,8 | 2,52 | 2,268 | 2,041 | | | | |

2. À l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on établir pour la limite des termes de la suite $(u_n)$ ?

   On note : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \ldots$

**E.13**

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par : $u_n = 9n - 5$

   a. Déterminer la nature de la suite $(u_n)$ en précisant ses caractéristiques.

   b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par : $v_n = 2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

   a. Déterminer la nature de la suite $(v_n)$ en précisant ses caractéristiques.

   b. Déterminer la limite de la suite $(v_n)$.

## 4. *Limites de somme des termes de suites*

**E.14**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $2$ et de raison $-1$.

   a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang $n$.

   b. On note $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de $S_n$ en fonction de $n$.

   c. En déduire la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $5$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

   a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang $n$.

   b. On note $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de $S'_n$ en fonction de $n$.

   c. En déduire la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S'_n$.

**E.15** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $2$ et de raison $\dfrac{2}{5}$ :

1. Déterminer les trois premiers termes de cette suite.

2. a. Déterminer l'expression de la somme des $n+1$ premiers termes de cette suite en fonction de $n$.

   b. En déduire la valeur de la limite suivante :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty} u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

 CC BY-NC

**E.16** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$ et la suite $(R_n)$ définie, pour $n\geqslant 2$, par la somme :

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$$

Déterminer la limite de la suite $(R_n)$.

**E.17** Un coureur se lance un défi : il souhaite faire le tour de l'Europe.
Le premier jour, il parcourt $50\,km$. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de 1 %.

On note $u_n$ la longueur parcourue par le coureur le $n$-ième jour. En supposant que le coureur poursuive indéfiniment sa course, on obtient une suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre premiers termes de la suite $(u_n)$.
2. a. Quelle est la nature de la suite $(u_n)$? Donner les éléments caractéristiques de la suite $(u_n)$.
   b. Exprimer le terme $u_n$ en fonction du rang $n$.
   c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le $100^e$ jour? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.
3. On note $S$ la somme des $n$ premiers termes de la suite $(u_n)$ : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
   a. Exprimer la somme $S_n$ en fonction du rang $n$.
   b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres :

| $n$ | 10 | 100 | 500 | 750 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_n$ | | | | | |

   c. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la somme $S_n$ quand la valeur de $n$ devient de plus en plus grand?

**E.18** Un globe-trotter a parié de parcourir $5\,000\,km$ à pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir $50\,km$ en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.

On notera $d_n$ la distance parcourue durant le $n$-ième jour.

1. Calculer les distances $d_1$, $d_2$, $d_3$ parcourues durant les trois premiers jours.
2. Quelle est précisément la nature de la suite?
   Déterminer la valeur de $d_n$ en fonction de $n$.
3. On note $L_n$ la distance en kilomètres parcourus au bout de $n$ jours.
   $L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$
   a. Déterminer l'expression de $L_n$ en fonction de $n$.
   b. En déduire la limite de $L_n$ lorsque $n$ tend verse $+\infty$.
   Le globe-trotter peut-il gagner?
   c. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours $N$ qui lui seraient nécessaires pour parcourir $4\,999\,km$

**E.19** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

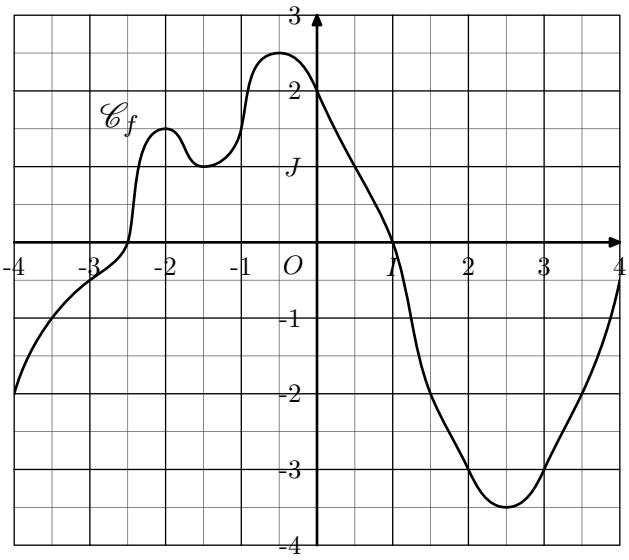
Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n \quad ; \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

1. Exprimer le terme $S_n$ en fonction de $n$.
2. Déterminer la limite de la suite $(T_n)$.

## 5. *Autres limites*

**E.20** On considère la fonction $f$ définie sur $[-4\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :




On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que le terme $u_1$ est égal à $-3$.
2. Justifier les égalités suivantes :
   a. $u_2 = -0{,}5$ b. $u_3 = 2{,}5$
3. Compléter le tableau suivant :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | | | | | | | | | | |

4. Que peut-on dire de la limite des termes de la suite $(u_n)$?

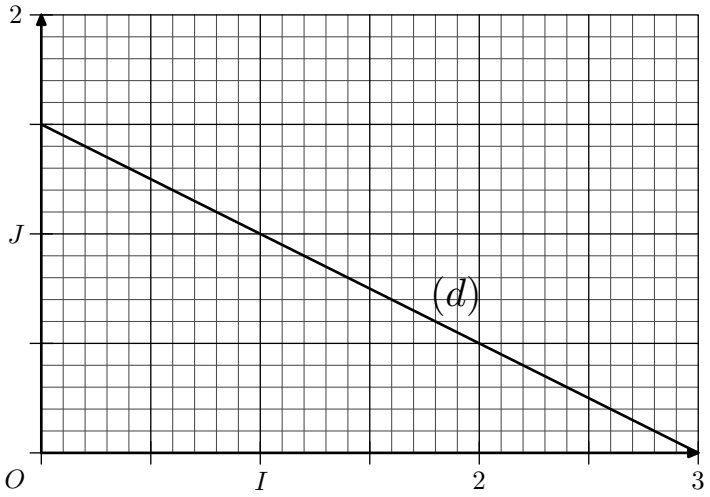
 CC BY-NC

**E.21** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = \frac{5}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot u_n + \frac{3}{2} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, la droite $(d)$ ayant pour équation :

$$y = -\frac{1}{2}\cdot x + \frac{3}{2}$$




1. Graphiquement, sur l'axe des abscisses représentées les cinq premiers termes de cette suite *(les constructions doivent être laissées)*.

2. a. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en indiquant les valeurs approchées au dixième près :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 2,5 | 0,25 | 1,38 | 0,81 | 1,09 | | | | | |

b. Quelle conjecture peut-on porter sur la limite de la suite $(u_n)$ ?

## 6. *Avec un tableur*

**E.22** Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau de valeurs de chacune des suites suivantes. Si nécessaire, on arrondit les valeurs au centième près :

1. Soit $(u_n)$ définie par la relation :
$u_n = 2\cdot n + 3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | | | | | | | | |

2. Soit $(v_n)$ définie par la relation :
$v_0 = 5 \quad ; \quad v_{n+1} = 0{,}75\cdot v_n + 3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Soit $(w_n)$ définie par la relation :
$w_n = v_n - 12$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a. Compléter le tableau de valeurs :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_n$ | | | | | | | | |
| $w_n$ | | | | | | | | |

b. Vérifier que les 8 termes de la suite $(w_n)$ permettent de conjecturer que la suite $(w_n)$ est géométrique.

3. Soit $(t_n)$ définie par la relation :
$t_0 = 0 \quad ; \quad t_1 = 1 \quad ; \quad t_{n+1} = t_n + t_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_n$ | | | | | | | | |

4. Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ définies par les relations :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = -1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2\cdot a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3\cdot b_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | | | | | | |
| $b_n$ | | | | | | | | |

**E.23** On définit les deux suites $u$ et $v$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 12 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot(u_n + 2\cdot v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}\cdot(u_n + 3\cdot v_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. À l'aide d'un tableur, générer les 20 premiers termes de ces deux suites afin d'obtenir un tableau analogue à celui présenté ci-contre.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_n$ | $y_n$ | $w_n$ | | $t_n$ |
| 2 | 1 | 12 | | | |
| 3 | 8,33 | 9,25 | | | |
| 4 | 8,94 | 9,02 | | | |
| 5 | 9,00 | 9,00 | | | |
| 6 | 9,00 | 9,00 | | | |

2. On définit la suite $(w_n)$ par : $w_n = v_n - u_n$

a. Dans la colonne C, exprimer les 20 premiers termes de la suite $w$.

b. Que peut-on faire pour mettre en évidence que la suite $w$ suit une progression géométrique sur ces 20 premiers termes ?

2. On définit la suite $t$ définie par : $t_n = 3\cdot u_n + 8\cdot v_n$

a. Exprimer les 20 premiers termes de la suite $t$.

b. Quelle conjecture peut-on effectuer sur la nature de la suite $t$ ?

 CC BY-NC

## 7. Suites arithmético-géométriques

**E.24** On considère la suite $(u_n)$ définie par la relation :

$u_0 = 8 \quad ; \quad u_{n+1} = 0{,}95 \cdot u_n + 0{,}5 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. On définit la suite $(v_n)$ définie par la relation :
   $v_n = u_n - 10 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - a. Justifier que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,95. On précisera la valeur de son premier terme.
   - b. Exprimer les termes de la suite $(v_n)$ en fonction de $n$.
2. En déduire une expression de la suite $(u_n)$ en fonction de $n$.
3. Déterminer la limite des termes de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**E.25** On considère la suite $(u_n)$ définie par la relation :

$u_0 = -2 \quad ; \quad u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 0{,}5 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. On définit la suite $(v_n)$ définie par la relation :
   $v_n = u_n + 0{,}5 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - a. Justifier que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
   - b. Exprimer les termes de la suite $(v_n)$ en fonction de $n$.
2. En déduire une expression de la suite $(u_n)$ en fonction de $n$.
3. Déterminer la limite des termes de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## 8. Suites définies conjointements

**E.26** On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies conjointement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ v_0 = 4 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = 2 \cdot u_n - v_n \\ v_{n+1} = -3 \cdot u_n + 4 \cdot v_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. On considère la suite $(w_n)$ définie par la relation :
   $w_n = v_n - u_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - a. Établir que la suite $(w_n)$ est une suite géométrique de raison 5.
   - b. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, le terme de rang $n$ s'exprime par :
     $w_n = -5^n$
2. On considère la suite $(t_n)$ définie par :
   $t_n = 3 \cdot u_n + v_n$
   - a. Montrer que : $t_0 = 19$
   - b. Établir que pour tout entier naturel, on a l'égalité :
     $t_{n+1} = t_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $t_n = 19$
3. Déduire une expression des termes des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ en fonction de $n$.
4. En déduire les limites des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**E.27** On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies conjointement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = -1 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 2 \cdot v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2 \cdot v_n \end{cases}$$

1. On considère la suite $(w_n)$ définie par la relation :
   $w_n = v_n - u_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - a. Établir que la suite $(w_n)$ est une suite géométrique de raison 4.
   - b. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, le terme de rang $n$ s'exprime par :
     $w_n = -4 \times 4^n$
2. On considère la suite $(t_n)$ définie par :
   $t_n = 4 \cdot u_n + 8 \cdot v_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - a. Donner la valeur du terme $t_0$.
   - b. Établir que pour tout entier naturel, on a l'égalité :
     $t_{n+1} = t_n$

   On admettra que la suite $(t_n)$ est constante.
3. Déduire une expression des termes des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ en fonction de $n$.
4. En déduire les limites des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**E.28** On considère les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 6 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}2 \cdot a_n + 1{,}3 \cdot b_n \\ b_{n+1} = -0{,}8 \cdot a_n - 0{,}2 \cdot b_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Exprimer les termes $a_{n+2}$ et $b_{n+2}$ en fonction des termes $a_n$ et $b_n$.
2. Que peut-on dire des termes de la suite $(a_{2n})$ ?

## 9. Autres suites

**E.29** Soit $(u_n)$ la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel $n$ par :

$u_{n+1} = 0{,}5 \cdot u_n + 0{,}5 \cdot n - 1{,}5$

1. Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par :
   $v_n = 0{,}1 \cdot u_n - 0{,}1 \cdot n + 0{,}5$

   Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors $v_n$ en fonction de $n$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n$ :
   $u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5$
3. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)$


CC BY-NC

**E.30** On considère la suite $(u_n)$ définie par :
$u_0 = 6 \quad ; \quad u_{n+1} = 2{\cdot}u_n - 3{\cdot}n + 5 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Donner les trois premiers termes de la suite $(u_n)$.
2. On considère la suite $(v_n)$ définie par :
$v_n = u_n - 3{\cdot}n + 2$
   a. Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 2.
   b. En déduire une expression des termes de la suite $(v_n)$ en fonction de leur rang.
3. a. Justifier que pour tout entier naturel $n$, on a :
$u_n = 8{\times}2^n + 3{\cdot}n - 2$
   b. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**E.31** Soit la suite numérique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}{\cdot}u_n + \frac{1}{3}{\cdot}n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On désigne par $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$v_n = u_n - n$

1. Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
2. En déduire que pour tout entier naturel $n$ :
$u_n = 2{\cdot}\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**E.32** On définit la suite $(u_n)$ est définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite $(v_n)$ par : $v_n = 4u_n - 8n + 24$

1. Par transformation successive, établir l'égalité suivante :
$v_{n+1} = \frac{1}{2}{\cdot}v_n$.
2. En déduire une expression des termes de la suite $(u_n)$ en fonction de $n$.

## 10. *Autres suites : suites récurrentes linéaires d'ordre 2*

**E.33** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \quad ; \quad u_{n+1} = 7{\cdot}u_n + 8{\cdot}u_{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.
2. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$s_n = u_{n+1} + u_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire $s_n$ en fonction de $n$.
3. a. On pose $v_n = (-1)^n{\cdot}u_n$ et on considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $t_n = v_{n+1} - v_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Exprimer $t_n$ en fonction de $s_n$.
   b. Quelle est la nature de la suite $(t_n)$ ?
4. a. Exprimer $v_n$, puis $u_n$, en fonction de $n$ *(on pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0 + \cdots + t_{n-1}$)*.
   b. Déterminer : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

## 11. *Limites de suites définies explicitement*

**E.34** Déterminer les limites des suites $(u_n)$ définies ci-dessous :

a. $n^3{\times}5^n$ b. $n - \left(\frac{2}{7}\right)^n$ c. $\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n$
d. $8^n - 3^n$ e. $\frac{5^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ f. $\left(\frac{31}{7}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n$

## 12. *Théorèmes des gendarmes*

**E.35** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel $n$, par la relation explicite : $u_n = \frac{3n+(-1)^n}{2n-1}$

1. Déterminer les trois premiers termes de la suite $(u_n)$.
2. Établir l'encadrement suivant :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\frac{3n-1}{2n-1} \leqslant u_n \leqslant \frac{3n+1}{2n-1}$
3. En déduire la valeur de convergence de $(u_n)$.

**E.36** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite de son terme de rang $n$ :
$u_n = \sqrt{2{\cdot}n+1} - \sqrt{2{\cdot}n}$

1. Montrer l'égalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$u_n = \frac{1}{\sqrt{2{\cdot}n+1} + \sqrt{2{\cdot}n}}$
2. Pour tout entier naturel $n$ non-nul, établir l'encadrement suivant : $0 < u_n < \frac{1}{2{\cdot}\sqrt{2{\cdot}n}}$
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

 CC BY-NC

**E.37** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme de rang $n$ est définie par la relation :

$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1. Établir l'encadrement suivant pour tout entier naturel $n$ non-nul : $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n+1}$
2. En déduire la convergence de la suite $(u_n)$ ; on précisera la valeur de la limite.

## 13. *Exercices non-classés*

**E.38** Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessous définies explicitement :

a. $u_n = \dfrac{2n^2-3n+1}{n+1}$

b. $u_n = \dfrac{n-3}{n^2+1}$

c. $u_n = \dfrac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1}$

d. $u_n = 1+n-2n^2+3n^3$

**E.39** Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n^2+2$

b. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 2+\dfrac{1}{n}$

c. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n^3+n+2$

d. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n-\dfrac{1}{n}$

e. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n\cdot(n-10)$

f. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{n+1}$

 CC BY-NC