Terminale Spécialité / Limites de suites et raisonnement par récurrence

1. Raisonnement par récurrences

E.1 Restitution organisée de connaissances.

On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y : $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel x : $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n : $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$

E.2 Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$x^n - 1 = (x-1)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

2. Formule explicite d'une suite

E.3 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 13$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot u_n + \frac{4}{5}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel :
$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$$
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

E.4 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$
3. On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{R}}$ définie par :
$$d_n = u_{n+1} - u_n$$
Déterminer la nature de la suite *(on précisera son premier terme et sa raison)*.

3. Formule explicite, comparaison et variations

E.5 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 2\cdot u_n + 2\cdot n^2 - n$$

1. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.
2. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

On considère également la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = u_n + 2\cdot n^2 + 3\cdot n + 5$$

3. Établir que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
4. En déduire une expression des termes de la suite (u_n).

E.6 Soit (u_n) une suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$: $u_n \geqslant 0$.
2. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
   a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_n = \frac{25}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}\cdot n - \frac{21}{4}$$

4. Somme des termes d'une suite

E.7 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2\cdot n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.
   b. Justifier que la suite (v_n) est une suite arithmétique

de raison 2 et dont on précisera le premier terme.

2. On définit la suite (S_n) par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

$$S_n = (n+1)(n+2) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

5. Convergences de suites monotones

E.8 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est majorée par 7.
2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

E.9 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{5} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + \frac{2}{5} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Justifier que la suite (u_n) est convergente *(on ne demande pas la valeur de la limite)*.

E.10 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = \frac{2}{5} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + \frac{2}{5} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1$$

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.
2. Démontrer que (u_n) est croissante.
3. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

E.11 La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + \frac{23}{27} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
3. Établir la convergence de la suite (u_n).

E.12 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $0 < u_n \leqslant 2$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

E.13 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2 \cdot n} \cdot u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $v_n = \dfrac{u_n}{n}$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :
   $u_n = \dfrac{n}{2^n}$

E.14 Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + 3 \times 0{,}5^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. a. Déterminer la valeur du terme u_1.
   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel non-nul n, on a :
   $u_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$
2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :
   $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

6. Divergence de suites monotones

E.15 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + n - 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. a. Démonter que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$:
   $u_n \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$:
   $u_n \geqslant n - 3$
   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

E.16 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2. a. Établir, par un raisonnement par récurrence, l'inégalité suivante pour tout entier naturel n :
$u_n > n^2$

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

7. Suites et variations de fonctions

E.17 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(x + \frac{2}{x}\right)$

On admet que la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Variation de f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$u_0 = \frac{1}{2}$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$u_n \geqslant \sqrt{2}$

2. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$: $f(x) \leqslant x$.

3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

4. Prouver que la suite (u_n) converge.

E.18 On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}\cdot x^2$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 1$; $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 1$.

E.19 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. On note α l'unique nombre réel positif vérifiant :
$f(\alpha) = \alpha$ où $\alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 0$; $u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha]$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

3. Établir que la suite (u_n) est convergente.

E.20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$f(x) = \ln(x) + 2$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = e$; $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Établir que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on a :
$u_n \leqslant u_{n+1}$

2. a. Établir que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on a :
$u_n \leqslant 5$

   b. Établir que la suite (u_n) est convergente.

8. Théorème des gendarmes

E.21 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) \quad \text{pour tout entier naturel } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n > 0$

2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n - \sqrt{5} \geqslant 0$

3. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n non-nul l'inégalité suivante :
$u_n - \sqrt{5} \leqslant \frac{1}{2^n}$

4. Déduire des questions précédentes la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

E.22 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. a. Établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2\cdot u_n}$$
   b. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n \geqslant \sqrt{2}$$
2. a. Déduire des questions précédentes l'encadrement :
$$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$$
   b. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'encadrement ci-dessous pour tout entier naturel n :
$$0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(u_0 - \sqrt{2}\right)^{(2^n)}$$
3. a. Donner la valeur de $\left|u_0 - \sqrt{2}\right|$, arrondie au millième près.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

E.23 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$0 < v_n < 3$$
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$
   b. En déduire que la suite (v_n) est croissante.
3. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

9. *Récurrence forte*

E.24 On considère la suite définie par les relations :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_1 = 8 \quad ; \quad u_{n+1} = 5\cdot u_n - 6\cdot u_{n-1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

1. Déterminer les valeurs des termes u_2 et u_3.
2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n non-nul, on a :
$$u_n = 2^n + 2\times 3^n$$
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

10. *Un peu plus loin dans la récurrence*

E.25

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\cdot\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$
   C'est-à-dire que :
$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\cdot\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$
2. La suite (v_n) est définie par : $v_n = 1{,}2777\cdots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.

   Ainsi : $v_0 = 1{,}2 \quad ; \quad v_1 = 1{,}27 \quad ; \quad v_2 = 1{,}277.$

   En utilisant le (a), démontrer que la limite de la suite (v_n) est un nombre rationnel r *(c'est-à-dire le quotient de deux entiers)*. .

E.26 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{3\cdot u_n}{1 + 2\cdot u_n}$

1. a. Calculer u_1 et u_2.
   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $0 < u_n$.
2. On admet que pour tout entier naturel n : $u_n < 1$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   b. Démontrer que la suite (u_n) converge. *(on ne demande pas la valeur de la limite)*.

E.27 On définie la suite (u_n) par :

$$u_0 = \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2^n \text{ pour tout entier } n\in\mathbb{N}$$

Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'identité suivante pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $k\in\{0\,;1;\ldots;n\}$:

$$u_{n+1} = u_{n-k} + 2^{n-k}\cdot\left(2^{k+1} - 1\right)$$

11. *Cours*

E.28

1. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ pour tout entier naturel n :
   $\mathcal{P}_n$: "pour tout nombre réel x tel que $x > 0$:
   $(1 + x)^n \geqslant 1 + n\cdot x$"

   Cette relation s'appelle l'inégalité de Bernoulli
2. Montrer que pour tout nombre réel q tel que $q\in\left]1\,;+\infty\right[$, on a la limite :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} q^n = +\infty$$

12. *Exercices non-classés*

E.29 On considère les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \quad ; \quad b_0 = c_0 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot b_n & \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}\cdot a_n & \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \\ a_n + b_n + c_n = 1 & \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n :
$a_{n+2} = \dfrac{1}{6}\cdot a_n$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel p :
$$\begin{cases} a_{2p} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^p & \text{et} \quad a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et} \quad b_{2p+1} = \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^p \end{cases}$$

3. Montrer que : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} a_n = 0$.
On admet que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

E.30 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2^n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence :
$u_n = 2^n + 4$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

E.31 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 0{,}1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{3}{5} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on :
$\dfrac{3}{4} - u_n < 10^{-7}$

E.32 Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels sont définies par :

- $u_0=5$; $u_1=31$; $u_{n+2}=12\cdot u_{n+1}-35\cdot u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
- $v_0=-1$; $v_1=-11$; $v_{n+2}=12\cdot v_{n+1}-35\cdot v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

On définit les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$x_n = u_n + v_n \quad ; \quad y_n = u_n - v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Calculer x_0 et x_1. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (x_n) est une suite géométrique de raison 5.

2. Montrer de même que la suite (y_n) est une suite géométrique.

3. Calculer x_n et y_n en fonction de n ; en déduire le calcul de u_n et v_n en fonction de n.

E.33 On souhaite étudier la suite (u_n) de premier terme $u_0=5$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_n = 6 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

2. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

3. Déterminer à partir de quelle valeur de n, les termes de la suite (u_n) vérifient : $u_n \geqslant 5{,}9$

E.34 Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'identité :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$