Terminale Spécialité / Limites de suites et raisonnement par récurrence

1. Raisonnement par récurrences

E.1 Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$x^n - 1 = (x-1)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

2. Convergences de suites monotones

E.2 On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + 4 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est majorée par 7.
2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

E.3 On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \quad$ pour tout entier naturel n.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $0 < u_n \leqslant 2$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. Divergence de suites monotones

E.4 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + n - 2 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. a. Démonter que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$: $u_n \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$: $u_n \geqslant n-3$
   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Suites et variations de fonctions

E.5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$f(x) = \ln(x) + 2$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = e \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1. Établir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$
2. a. Établir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant 5$
   b. Établir que la suite (u_n) est convergente.

5. Théorème des gendarmes

E.6 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. a. Établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2\cdot u_n}$$
   b. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n \geqslant \sqrt{2}$
2. a. Déduire des questions précédentes l'encadrement :
   $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$
   b. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'encadrement ci-dessous pour tout entier naturel n :
   $0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(u_0 - \sqrt{2}\right)^{(2^n)}$
3. a. Donner une valeur approchée de $\left|u_0 - \sqrt{2}\right|$ au millième près.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

6. *Un peu plus loin dans la récurrence*

E.7 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{3 \cdot u_n}{1+2 \cdot u_n}$

1. a. Calculer u_1 et u_2.
   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $0 < u_n$.
2. On admet que pour tout entier naturel n : $u_n < 1$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   b. Démontrer que la suite (u_n) converge. *(on ne demande pas la valeur de la limite).*

E.8 On définie la suite (u_n) définie par :

$u_0 =$; $u_{n+1} = u_n + 2^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'identité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \{0;1;\ldots;n\}$:

$$u_{n+1} = u_{n-k} + 2^{n-k} \cdot \left(2^{k+1} - 1\right)$$

7. *Exercices non-classés*

E.9 On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 5$; $u_{n+1} = u_n + 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

$u_n = 2^n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

E.10 On souhaite étudier la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$
2. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.
3. Déterminer à partir de quelle valeur de n, les termes de la suite (u_n) vérifient : $u_n \geqslant 5{,}9$

E.11 Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'identité :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

