

Terminale Spécialité / Logarithmes



ChingQuizz : 5 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM :

1. Introduction

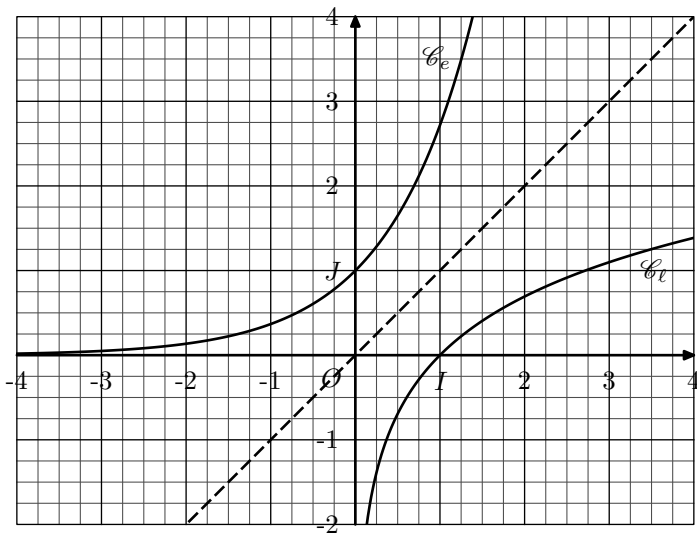
E.1 Soit f la fonction définie par sur $[0; 1]$:

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$:

$$(f \circ f)(x) = x$$

E.2 Dans le plan munit du repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère les courbes $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{C}_l$ représentatives des fonctions exponentielle et logarithme :



1 Graphiquement déterminer les valeurs des deux images suivantes :

$$(\exp \circ \ln)(1) \quad ; \quad (\ln \circ \exp)(0)$$

2 En utilisant la première bissectrice du plan, déterminer, si possible, la valeur des images suivantes :

$$\text{a) } (\exp \circ \ln)(2) \quad \text{b) } (\exp \circ \ln)(3)$$

$$\text{c) } (\exp \circ \ln)(-1) \quad \text{d) } (\ln \circ \exp)(-1)$$

$$\text{e) } (\ln \circ \exp)(1) \quad \text{f) } (\ln \circ \exp)(1,5)$$

E.3 Résoudre les équations suivantes :

$$\text{a) } e^x = 3 \quad \text{b) } e^{3x-1} = 4 \quad \text{c) } 2 \cdot e^x = -2$$

$$\text{d) } \ln(x) = 2 \quad \text{e) } \ln(2 \cdot x + 1) = 5 \quad \text{f) } \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = 3$$

E.4

1 a) Résoudre chacune des inéquations suivantes :

$$3x + 1 > 0 \quad ; \quad -x + 2 > 0$$

b) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g :

$$f(x) = \ln(3x+1) \quad ; \quad g(x) = \ln(-x+2)$$

2 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$\text{a) } h(x) = \ln x^2 \quad \text{d) } j(x) = \ln(e^x - 1)$$

$$\text{e) } k(x) = \ln(e^x - e^{-x}) \quad \text{f) } \ell(x) = \frac{1}{\ln(x) - 1}$$

2. Manipulations algébriques

E.5 Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme : $a + b \cdot \ln 2$ $a, b \in \mathbb{R}$

$$\text{a) } \ln(4) \quad \text{b) } \ln(2\sqrt{2}) \quad \text{c) } \ln(6) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{d) } \ln(2 \cdot e^2) \quad \text{e) } \ln\left(\frac{2}{e^3}\right) \quad \text{f) } \ln(\sqrt{e^5})$$

E.6 Simplifier les expressions suivantes :

$$\text{a) } \ln(e^{2 \cdot x}) \quad \text{b) } \ln(2 \cdot e^{3x-1})$$

$$\text{c) } 2 \cdot \ln x + \ln x \quad \text{d) } \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

E.7 Établir les égalités suivantes :

$$\text{a) } \ln(16) + \ln(4) = 6 \cdot \ln 2 \quad \text{b) } \ln\left(\frac{7}{5}\right) = -\ln\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$\text{c) } \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{9}{8}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \quad \text{d) } \frac{\ln(\sqrt{8})}{\ln(\sqrt{2})} = 3$$

E.8 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$$

1 Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2 Sur $\mathbb{R}$, établir l'identité : $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$

3 En déduire que la fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

E.9

1 Que peut-on dire de l'image de deux nombres opposés par la fonction exponentielle ?

2 Que peut-on dire de l'image de deux nombres inverses par la fonction logarithme ?

E.10 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

1 On considère la fonction u définie par :

$$u(x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Par une disjonction de cas, établir que la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$.

2 On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Établir que la fonction f est la fonction nulle.

E.11 Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + e^{-x}$$

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}$$

On admet que pour tout nombre x positif, on a la relation : $\ln(1+x) \leq x$

1 En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$$

2 Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$f[\ln(n)] = \ln(n) + \frac{1}{n}$$

3 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel

n non nul :

$$\ln n \leq u_n$$

4 En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

E.12 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(e^x + 2 \cdot e^{-x})$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans un repère.

On note (d) la droite d'équation $y = x$

1 Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = x + \ln(1 + 2 \cdot e^{-2 \cdot x})$$

2 Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite (d) .

E.13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = 6 \times \ln(2x)$$

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = f(2x)$

1 Établir que pour tout x appartenant à l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, on a : $g(x) - f(x) = \ln(64)$

2 Dans un repère orthonormé, on considère les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g .

Quelle interprétation peut-on donner de la question 1 relativement aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?

3. Equations et inéquations de logarithmes

E.14 Pour chaque question, préciser l'ensemble de résolution de l'équation puis la résoudre :

a $\ln(5x+1) = \ln(x-1)$

b $2 \cdot \ln(3-x) = \ln(2)$

c $\ln(3x+1) = 5$

d $3 \cdot e^{2x-1} = 2$

e $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

f $e^{2x} + 4 \cdot e^x - 1 = 0$

E.15 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les deux systèmes d'équations suivants :

a $\begin{cases} 2 \cdot \ln x - 3 \cdot \ln y = -11 \\ \ln x + \ln y = 2 \end{cases}$

b $\begin{cases} \ln(2 \cdot x + y) = 0 \\ \ln(x) + \ln(y) = 1 \end{cases}$

E.16

1 Résoudre dans $] -1; +\infty[$, l'inéquation :

$$(E): \ln(x+1) \leq \ln(x^2+1)$$

2 Résoudre dans $] -3; 2[$, l'inéquation :

$$(F): \ln(4-2x) < \ln(x+3)$$

E.17 On considère l'inéquation :

$$(E): \ln(x+1) \leq \ln(2-x)$$

1 Donner la plus grande partie I de $\mathbb{R}$ sur laquelle les deux expressions $\ln(x+1)$ et $\ln(2-x)$ sont définies.

2 Résoudre l'inéquation (E) .

E.18 Déterminer l'ensemble de résolution de chacune de ces inéquations puis les résoudre :

a $\ln(x) > 9$

b $\ln(x) \leq \frac{1}{2}$

c $(\ln x)^2 - 3 \cdot \ln x + 1 \geq 0$

d $-(\ln x)^2 + 4 \cdot \ln x + 1 \geq 0$

e $e^{3 \cdot x} < 0$

f $e^{2 \cdot x} - e^x - 6 > 0$

E.19 Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules :

75 % de particules A et 25 % de particules de B .

Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B .

On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t=0$, on a $p(0)=0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a :

$$p(t) = 0,75 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante réelle.}$$

La demi-vie des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1 Calculer λ , arrondie à 10^{-5} près.

2 Au bout de combien d'années, 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?

3 Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondit à l'unité).

E.20 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :
 $f(x) = 5 \cdot e^{-x} - 3 \cdot e^{-2x} + x - 3$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

On admet que la courbe $\mathcal{C}_f$ se situe au-dessus de la droite ($\mathcal{D}$) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathcal{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN .

- ① Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, déterminer l'expression de la distance MN en fonction de x .
On notera g cette fonction.
- ② On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.
- ③ Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0; +\infty[$ que l'on déterminera.
En donner une interprétation graphique.

E.21 Résoudre l'inéquation : $\ln(x+1) \leq \ln(2x-3)$

4. Equation et inéquation de puissances

E.22 Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, les inéquations suivantes :

- a) $5^n \geq 2$ b) $0,1^n \geq 2$
 c) $(\ln 2)^n < e^2$ d) $\ln(2^n) - \ln(3^n) \leq 2$

E.23

- ① On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{2}{3}$.

- a) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
 b) Déterminer le plus petit entier naturel n réalisant l'inégalité : $u_n < 0,01$

- ② On considère la suite (v_n) géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{4}{5}$. On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (v_n) :
- $$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

- a) Justifier que la suite (S_n) est croissante.
 b) Exprimer la somme S_n en fonction du rang n .
 c) Justifier qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (S_n) appartiennent à l'intervalle $[9,9; 10]$.
 d) Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant $S_n \in [9,9; 10]$.

E.24 On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$$

- ① Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f .
- ② Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1; +\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.
- ③ Déterminer l'entier naturel n_0 tel que : $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$.
- ④ Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

E.25 Une entreprise fabrique des articles. Suite à une série de contrôles, un article est détecté possédant au moins un défaut avec une probabilité de 0,0494.

Un petit commerçant passe une commande d'articles à cette entreprise. Les stocks sont suffisamment grands pour que le choix de ces articles soit assimilé à un tirage successif et indépendant.

- ① En commandant 25 articles, calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.
- ② Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

5. Equations et inéquations avec changement de variables

E.26 Résoudre l'équation et l'inéquation ci-dessous :

- a) $e^{2x} + 2 \cdot e^x - 3 = 0$ b) $e^{2x} + e^x - 2 < 0$

E.27 Résoudre l'inéquation : $2 \cdot e^{2 \cdot x} + 6 \cdot e^x - 8 < 0$

E.28 Soit f la fonction définie par la relation :

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

- 1 Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction f .
- 2 On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Montrer que la fonction f' admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{-e^x \cdot (e^{2x} - 4 \cdot e^x + 1)}{(e^{2x} - e^x + 1)^2}$$

- 3 a Étudier le signe du polynôme $x^2 - 4x + 1$.
- b En déduire que la fonction f' admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

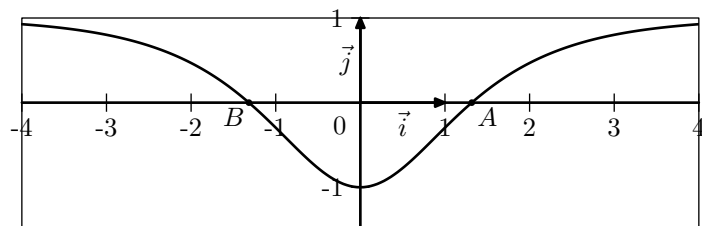
On précisera les valeurs de a et de b .

- 4 a Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b Dresser le tableau de variations de la fonction f . À l'aide de la calculatrice, on indiquera les valeurs de $f(a)$ et de $f(b)$ arrondies au centième près.

E.29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - \frac{4 \cdot e^x}{e^{2x} + 1}$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathcal{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B .



L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

- 1 La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - a Vérifier que pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{4 \cdot e^x \cdot (e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$$
 - b En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$
- 2 La droite d'équation $x=0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.
Démontrer que cette conjecture est vraie.
(Question hors programme 2012)
- 3 On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = e^a$.
 - a Démontrer que le réel c est une solution de l'équation :

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$
En déduire la valeur exacte de a .
 - b Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

E.30 Résoudre les inéquations suivantes :

a $\frac{e^x + 3}{e^x - 1} > 0$ b $-e^{2x} - e^x + 2 > 0$

6. Limites

E.31 Déterminer la valeur des limites suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot \ln x + x$ b $\lim_{x \rightarrow -3^+} \ln(x+3) - 3 \cdot x$
 c $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - \frac{1}{x}$ d $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1)$
 e $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-2 \cdot \ln x + 1}$ f $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - x)$

7. Limites par croissance comparée

E.32 Déterminer les limites suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ b $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$
 c $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ d $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \cdot (x^2 + 2)$
 e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{\ln x}$ f $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

E.33 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère la fonction numérique φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \ln(x^2 - 2 \cdot x + 2) - x$$

- 1 Déterminer la limite de φ en $-\infty$.
- 2 a Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\varphi(x) = x \cdot \left[\frac{2 \cdot \ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1 \right]$$
b En déduire la limite de φ en $+\infty$.

8. Dérivées

E.34 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- (a) $f(x) = x \cdot \ln x$ (b) $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2 + 1}$
 (c) $h(x) = \ln(\sqrt{1-x})$ (d) $j(x) = \ln(e^x - 1)$

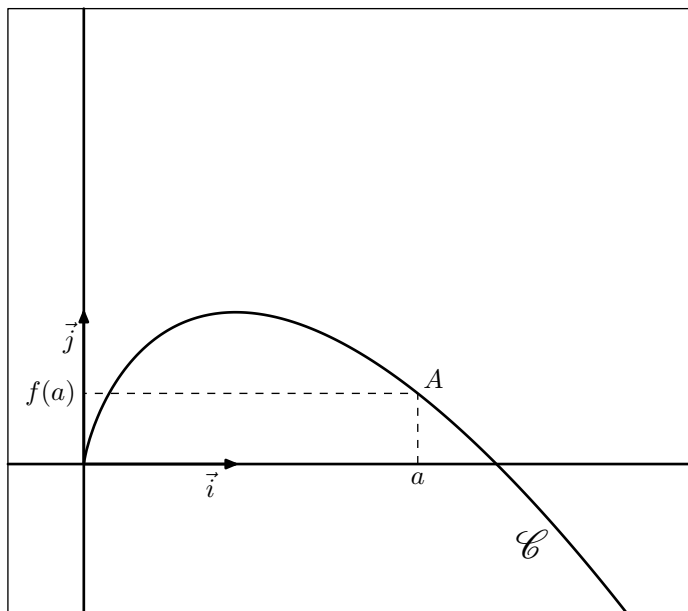
E.35 On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :
 $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan

9. Dérivées et tangentes

E.36 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
 $f(x) = x \cdot (1 - \ln x)$

- (1) Justifier que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et qu'elle admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
 $f'(x) = -\ln x$
- (2) Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse a .
- (a) Déterminer, en fonction du nombre réel a , les coordonnées du point A' , point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.
- (b) Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a) . Construire sur la représentation graphique de la courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous, la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.



muni d'un repère orthonormé.

- (1) (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 (b) Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$
- (2) Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer qu'il existe une tangente unique à la courbe $\mathcal{C}$ passant par O . Préciser une équation de cette tangente.

E.37 On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 3 cm.

- (1) Déterminer la limite en 0 de la fonction f . Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat?
- On admet que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
 $f'(x) = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2}$
 et que la fonction f est strictement croissante. On note (d) la droite d'équation $y = x$.
- (2) (a) Déterminer l'abscisse du point A de la courbe $\mathcal{C}$ en lequel la tangente $(\mathcal{T})$ est parallèle à la droite (d) .
 (b) Déterminer l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$.
- (3) À l'aide de la calculatrice, tracer les droites (d) et $(\mathcal{T})$ et la courbe $\mathcal{C}$.

10. Etudes de fonctions

E.38 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur l'intervalle

$$[0; +\infty[\text{ par : } f(x) = -3 - \ln x + 2 \cdot (\ln x)^2$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

- 1 a Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation: $f(x)=0$.
(On pourra poser: $\ln x = X$).
- b Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation: $f(x) > 0$.
- 2 a Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.- b Calculer $f'(x)$.
- c Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
- 3 Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.
- 4 On se propose d'étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{T})$. Pour cela, on considère la fonction φ , définie sur $]0; +\infty[$ par:

$$\varphi(x) = f(x) - \left(4 \cdot e^{-\frac{5}{4}} \cdot x - \frac{41}{8}\right)$$

- a Montrer que: $\varphi'(x) = \frac{4 \cdot \ln x - 1}{x} - 4 \cdot e^{-\frac{5}{4}}$
puis calculer $\varphi''(x)$.
- b Étudier le sens de variation de φ' sur $]0; +\infty[$.
En déduire que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, on a: $\varphi'(x) \leq 0$.
- c Calculer $\varphi\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, déterminer le signe de $\varphi(x)$.
En déduire la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{T})$.
- 5 Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{T})$. (unité graphique: 2 cm)

11. Etude de fonctions et théorème de valeurs intermédiaires

E.39 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par:
 $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

- 1 Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- 2 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par:
 $g(x) = f(x) - x$ - a Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- b Montrer que sur l'intervalle $[2; 3]$ l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution que l'on notera α .
Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1} .
- c Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x)=x$.

E.40 On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-2; +\infty[$ par: $f(x) = 1 + x \cdot \ln(x+2)$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A: étude de la fonction f

- 1 Étude des variations de la dérivée f' :- a f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $] -2; +\infty[$.
- b Étudier les variations de f' sur l'intervalle $] -2; +\infty[$.
- c Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.
- 2 Étude du signe de $f'(x)$.- a Montrer que sur l'intervalle $] -2; +\infty[$ l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-0,6; -0,5]$.
- b En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
- 3 Étude des variations de f :- a Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $] -2; +\infty[$.
- b Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.
- c Dresser le tableau de variations de f . A l'aide de la calculatrice, on indiquera les coordonnées du point d'abscisse α à 10^{-3} près.

Partie B

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $] -2; +\infty[$, on appelle T_{x_0} la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse x_0 . On note, pour x appartenant à l'intervalle $] -2; +\infty[$:

$$d(x) = f(x) - [f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)]$$

- 1 Étude des variations de d :- a Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] -2; +\infty[$:
 $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$
- b En utilisant la croissance de la fonction f' , donner le

signe de $d'(x)$ selon les valeurs de x . En déduire les variations de d sur l'intervalle $] -2; +\infty[$.

- 2 Déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de T_{x_0} .

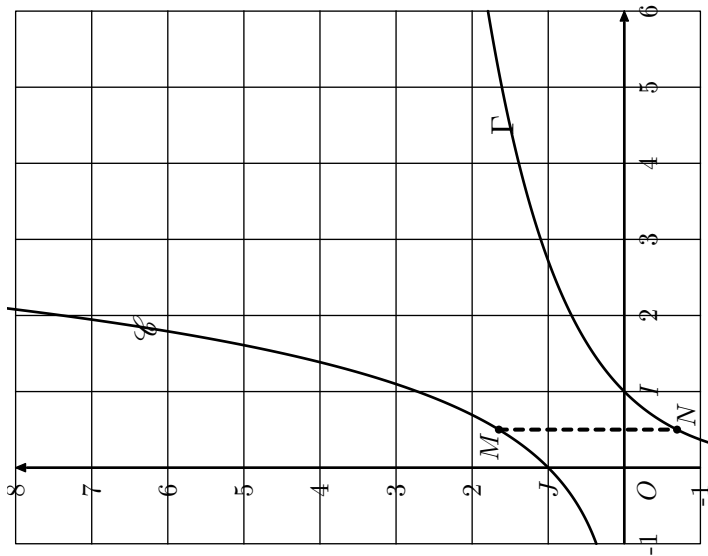
E.41

- 1 Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
 $f(x) = x \cdot e^x - 1$

- a Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f .
 b Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
 c Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

- 2 On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et Γ sont données ci-dessous :



Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x .

On rappelle que pour tout réel x strictement positif :
 $e^x > \ln(x)$.

- a Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur à 10^{-2} près.
 b En utilisant la question 1, montrer que : $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.
 En déduire que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

12. Etude de fonctions avec étude d'une fonction auxiliaire

E.42 On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$$

- 1 Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :
 $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$
 Montrer que la fonction g est positive sur $[1; +\infty[$.

- 2 a Montrer que, pour tout x de $[1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

- b En déduire le sens de variation de f sur $[1; +\infty[$.

E.43 Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2 \cdot \ln x$

- 1 Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 2 Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α , arrondie au centième.
 3 En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1 Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
 2 Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

- ③ En déduire le tableau de variations de la fonction f .
- ④ Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

E.44 On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 3 cm .

I- Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x$$

- ① Étudier les variations de g sur $]0; +\infty[$.
- ② En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

II- Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative $\mathcal{C}$

- ① Déterminer la limite en 0 de la fonction f . Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat?
- ② Déterminer la limite en $+\infty$ de f .
- ③ Soit f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.
- ④ En déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

- ⑤ Déterminer le point A de la courbe $\mathcal{C}$ en lequel la tangente $\mathcal{T}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.
- ⑥ Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tracer les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ et

la courbe $\mathcal{C}$.

E.45 Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2 + 1) \cdot \ln(x^2 + 1)$$

- ① En détaillant les calculs effectués, montrer que :

$$g'(x) = 2x - 2x \cdot \ln(x^2 + 1)$$
- ② Faire l'étude du sens de variation de g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- ③ Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α , dans l'intervalle $[\sqrt{e-1}; \sqrt{e^2-1}]$, tel que $g(\alpha) = 0$; donner la valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- ④ En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction f

La fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \quad \text{lorsque } x \neq 0.$$

Sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$, dans le plan rapporté à un repère d'origine O est donnée ci-dessous :

- ① a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.
 En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
- b) Vérifier que, pour x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2 \cdot (1+x^2)}$$

 Faire l'étude du sens de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- ② a) Montrer que, pour $x \geq 1$: $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2x^2)}{x}$
- b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

13. Étude de familles de fonctions

E.46 On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + 2 \cdot \ln x}{x^2}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f et soit $(\mathcal{C}')$ celle de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{x}$.

- ① Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f .
- ② Pour tout x de $]0; +\infty[$, on pose :

$$g(x) = 1 - x + 2 \cdot \ln x$$
- a) Étudier les variations de la fonction g .
- b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0; 2[$ et $]2; 4[$. Soit α la solution appartenant à $]2; 4[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- ③ a) Montrer que $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ se coupent en deux points.

- b) Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$$

Partie B

On considère, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x^{2n}}$$

- ① Calculer la dérivée f'_n de la fonction f_n .
- ② Résoudre l'équation $f'_n(x) = 0$. Soit x_n la solution de cette équation.
- ③ Déterminer la limite de la suite (x_n) .

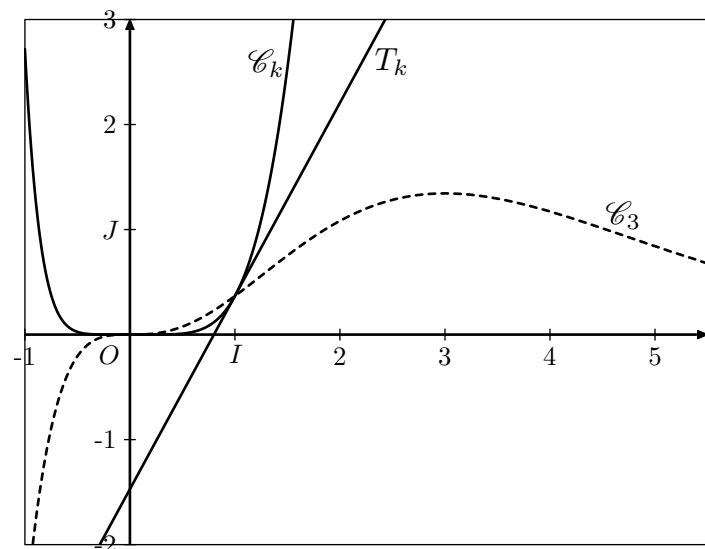
E.47 Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = x^n \cdot e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathcal{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathcal{C}_3$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}; 0\right)$.



- 1 a Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1 .
- c À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.
- 2 a Démontrer que pour $n \geq 1$, toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
- b Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x :

$$f'_n(x) = x^{n-1} \cdot (n-x) \cdot e^{-x}$$
- 3 Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x=3$. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.
- 4 a Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}; 0\right)$.
- b En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k .

E.48 Partie A

On considère la famille de fonctions (f_k) définie pour $k \in \mathbb{N}$ par : $f_k(x) = (x+k) \cdot e^x + x$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormé.

Quelle fonction de la famille (f_k) admet la droite (d) d'équation $y = x - e^{-2}$ comme tangente au point d'abscisse -2 ?

Partie B

- 1 On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = (x+1) \cdot e^x + e^{-2}.$$

- a Déterminer l'expression de la fonction g' .
- b Dresser le tableau de variations de la fonction g .

- 2 Déduire des questions précédentes la position relative de la courbe $\mathcal{C}_1$ et de la droite (d) .

E.49 Étant donné un nombre réel k , on considère la fonction

$$f_k \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } f_k(x) = \frac{1}{1 + e^{-k \cdot x}}$$

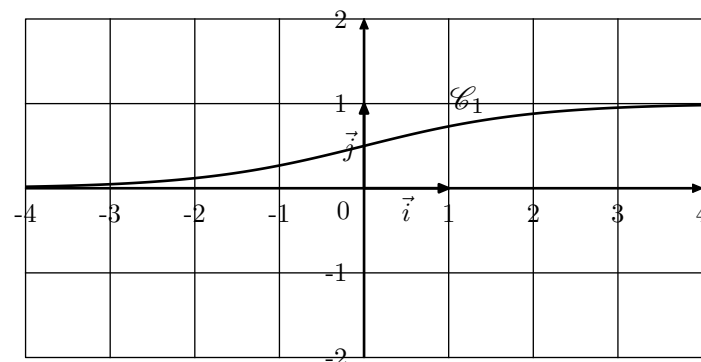
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie, on choisit $k=1$. On a, pour tout réel x :

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

La représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est donnée ci-dessous :



- 1 Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 2 Démontrer que, pour tout réel x : $f_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.
- 3 On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x , $f'_1(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k=-1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1} .

Pour tout réel x , on appelle P le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathcal{C}_{-1}$ d'abscisse x .

On note K milieu du segment $[MP]$.

- 1 Montrer que, pour tout réel x : $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
- 2 En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
- 3 Tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ sur le repère ci-dessous.

E.50 Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1) \cdot e^x$$

- ① Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- ② On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que pour tout réel x : $f'(x) = (x+2) \cdot e^x$.
- ③ Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

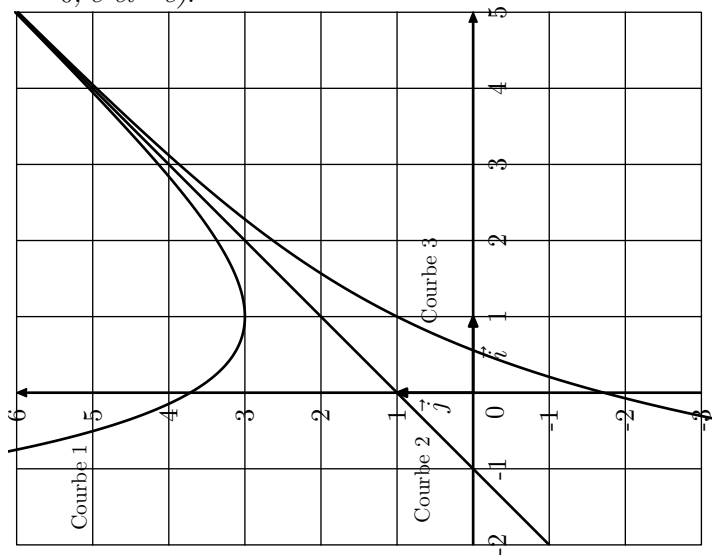
Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m \cdot e^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

- ①
 - a) Démontrer que :
 $g_m(x) = 0$ si, et seulement si, $f(x) = m$.
 - b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m .
- ② On a représenté ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{C}_{-e}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$).



Identifier chacune de ces courbes sur la figure ci-dessous en justifiant.

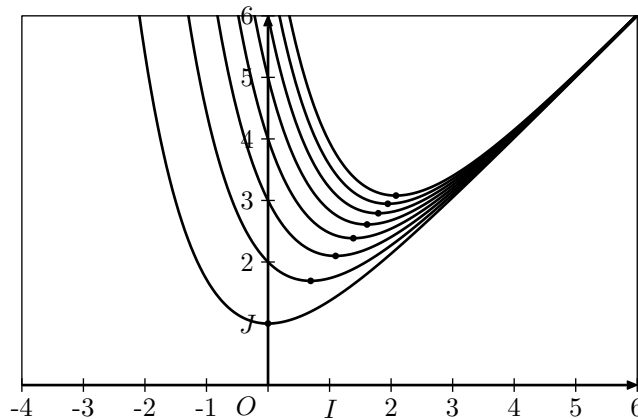
- ③ Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m .

E.51 Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k \cdot e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de k .



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point A_k de la courbe $\mathcal{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas?

14. Suites

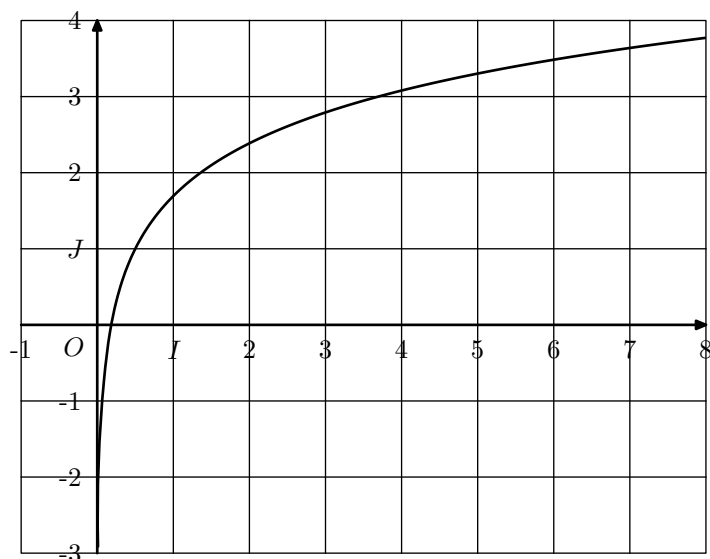
E.52

- ① On considère la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par :
 $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$
 - a) Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.
Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1; +\infty[$ une unique solution notée α .
 - b) Démontrer que : $\ln(2 \cdot \alpha) + 1 = \alpha$
- ② Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier

naturel n , par :

$$u_{n+1} = \ln(2 \cdot u_n) + 1.$$

On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2 \cdot x) + 1$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous :



- a) En utilisant la courbe (Γ) , construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.
- b) Démontrer que pour tout entier naturel n : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$
- c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α .

E.53 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0=1 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$$

- 1 a) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $0 < u_n \leq 2$
- b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
- c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.
- 2 On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \ln u_n - \ln 2$
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.
 - b) Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .
 - c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

E.54 Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + e^{-x}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

- 1 Étudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
- 2 Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}$$

- 1 Démontrer que, pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leq x$
On pourra étudier la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(1+x)$
- 2 En déduire que, pour tout entier naturel n non-nul : $\ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$
- 3 Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $f[\ln(n)] = \ln(n) + \frac{1}{n}$
- 4 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non-nul : $\ln n \leq u_n$
- 5 En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

E.55 Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$$

On admet que la fonction f définie par :

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$$

est croissante sur $\mathbb{R}$.

- 1 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0; 1]$.
- 2 Étudier les variations de la suite (u_n) .
- 3 Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- 4 On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité : $f(\ell) = \ell$
En déduire la valeur de ℓ .

15. Suites et sommes de termes

E.56 On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définis par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = u_n \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

- 1 Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.
- 2 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\ln u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

E.57 On considère la suite v de terme général (v_n) défini par :

$$v_n = \ln \left(\frac{n}{n+1}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On définit la somme S_n pour tout entier naturel non nul n par :

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$S_n = -\ln(n+1)$$

E.58 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = \ln(1+e^{-x})$

Partie A

- 1 Déterminer la limite de f en $-\infty$, puis la limite de f en $+\infty$.
- 2 Étudier le sens de variation de f .

Partie B

Voici deux fonctions extraites d'algorithmes prenant pour argument un entier naturel supérieur ou égal à 1 :

Algorithme 1

```

Fonction f(n)
  a ← 0
  k ← 1
  Tant que .....
    a ← a+exp(-k)
    k ← k+1
  Fin Tant que
  Renvoyer k

```

Algorithme 2

```

Fonction g(n)
  a ← 0
  Pour i allant de 1 à n
    b ← ln[1+exp(-i)]
    ...
  Fin Pour
  Renvoyer a

```

- 1 Considérons la suite (a_n) définie par :
 $a_n = e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 On admet que la suite (a_n) est croissante et converge vers la valeur $\frac{1}{e-1}$.

Compléter les pointillés de l'algorithme 1 afin que la valeur renvoyée par la fonction f soit le rang du premier terme de la suite (a_n) réalisant une valeur approchée de $\frac{1}{e-1}$ à 10^{-4} près lorsque la valeur fournie en argument soit la valeur 4.

- 2 On définit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
 $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.

Compléter l'algorithme 2 afin que la valeur renvoyée par la fonction g soit la valeur du terme de rang n lorsque la valeur de rang est fournie à la fonction g en argument.

Partie C

- 1 Soient u et v les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par :
 $u(t) = \ln(1+t) - t$; $v(t) = \ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2$

- a Étudier les variations de u et v .
- b En déduire que, pour tout nombre réel t positif, on a :
 $t - \frac{1}{2}t^2 \leq \ln(1+t) \leq t$

- 2 Soit n entier naturel non-nul ($n \geq 1$). On considère le nombre :

$$S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

- a Démontrer que pour tout entier naturel n :
 $\frac{1-e^{-n}}{e-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1-e^{-2n}}{e^2-1} \leq S_n \leq \frac{1-e^{-n}}{e-1}$
- b On admet la proposition suivante :

Proposition :

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que :
 $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 convergentes respectivement vers les nombres k , ℓ et m .
 Alors, on a l'encadrement : $k \leq \ell \leq m$

et on admet que la suite (S_n) a une limite réelle L .

Montrer que : $\left| L - \frac{1}{e-1} \right| \leq \frac{1}{2 \cdot (e^2-1)}$

- E.59** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier strictement positif n par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

- 1 On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

- a Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- b En déduire le signe de la fonction f .

- 2 a Démontrer que pour tout entier strictement positif :
 $u_{n+1} - u_n = f(n)$
- b En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

16. Logarithmes et probabilités

- E.60** Dans un jeu aléatoire, l'événement G "la partie est gagnée" a une probabilité de :

$$\mathcal{P}(G) = \frac{23}{180}$$

- 1 Un joueur répète six fois ce jeu de manière indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.
- 2 Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9?

- E.61** Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieur à 0,999.

E.62 Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'événement "le joueur gagne la n -ième partie" ;
- p_n la probabilité de l'événement G_n .

On a donc : $p_1 = 0,1$

- ① À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot p_n + \frac{3}{5}.$$

- ② Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul : $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$

- ③ Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

- ④ Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

17. Cours

E.63

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.

On suppose savoir que la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout x de $]0; +\infty[$, on a :

$$\exp(\ln x) = x$$

À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction $\ln$ est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à x associe $\frac{1}{x}$.

E.64 Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, positive sur $[1; +\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y, \\ \quad \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif } x, [\ln(x)]' = \frac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.} \end{cases}$$

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x$$

- ① Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0; +\infty[$.

- ② En déduire le signe de f puis, que, pour tout $x > 1$:

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$$

- ③ En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

E.65 Restitution organisée des connaissances

Pré-requis :

- La fonction logarithme népérien est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$;

Sa fonction dérivée est la fonction inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$.

- $\ln(1) = 0$

Démontrer que pour tous réels strictement positifs α et x :

$$\ln(\alpha x) = \ln(\alpha) + \ln(x)$$

E.66 Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

On considère la fonction g définie sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x \cdot \ln(2x + 1)$$

Proposition 1 :

Sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution $\frac{e-1}{2}$.

Proposition 2 :

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

E.67

Pré-requis : on rappelle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

- ① Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

- ② En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

18. Exercices non-classés

E.68 🔥 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x - 1$

- ① Déterminer le signe de f (on pourra étudier les variations de la fonction f).
Établir l'inégalité suivante pour tout entier naturel non nul n : $e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$

- ② En utilisant l'inégalité précédente, démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$

E.69 🌿 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4 \cdot e^x}{e^x + 3}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- ① a On note f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

- b Déterminer les sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

- ② Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

E.70 🔥

- ① Résoudre le système suivant, où u et v sont des nombres réels :

$$\begin{cases} u + \frac{1}{2} \cdot v = 0 \\ u - \frac{1}{4} \cdot v = \frac{3}{2} \end{cases}$$

- ② Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a \cdot e^x + \frac{b}{e^x + 1} \quad (a \text{ et } b \text{ réels})$$

Trouver les valeurs des réels a et b , sachant que la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ passe par O et que la tangente à la courbe en ce point est parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = \frac{3}{2}x - 2$.

- ③ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - \frac{2}{e^x + 1}$

- a Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $g(x) = 0$.

- b Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $g(x) \geq 1$