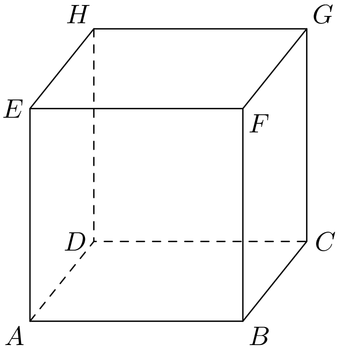
Terminale Spécialité / Orthogonalite, distance dans l'espace

1. Droites et orthogonalité

E.1 Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



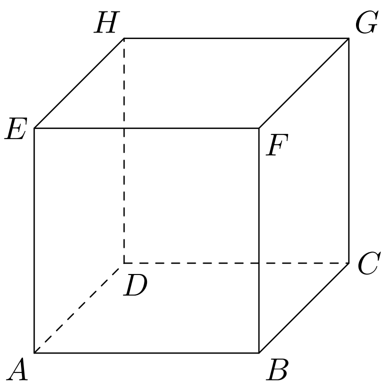
1. Justifier que les droites (EF) et (GC) sont orthogonales.
2. Justifier que les droites (AD) et (HF) ne sont pas orthogonales.
3. Les droites (AG) et (BG) sont-elles orthogonales?

2. Droites, plans et orthogonalité

E.2

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté $5\,cm$ représenté ci-dessous :

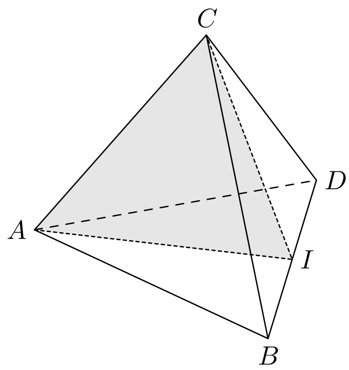
1. Montrer que le plan (ABC) est orthogonal à la droite (AE)
2. Calculer la longueur de la diagonale $[EC]$.



E.3

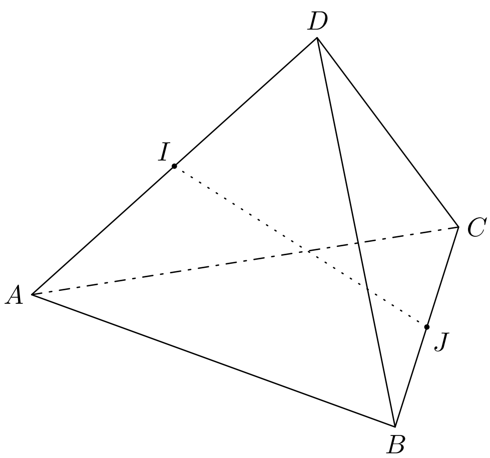
La figure ci-contre représente un tétraèdre régulier $ABCD$ et I le milieu du segment $[BD]$.

Justifier que la droite (BD) est orthogonale au plan (AIC).



3. Plan médian

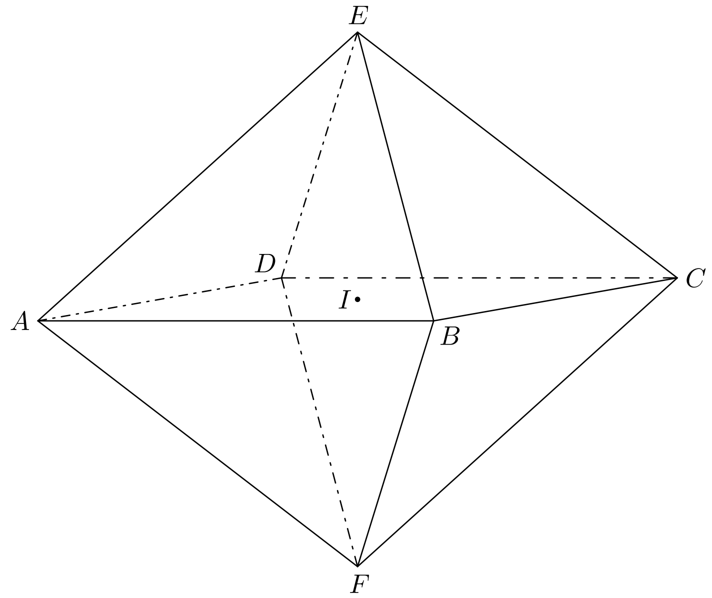
E.4 Dans l'espace, on considère le tétraèdre régulier $ABCD$ représenté ci-dessous :



Les points I et J sont respectivement les milieux des segments $[AD]$ et $[BC]$.

1. a) Justifier que le plan (JAD) est le plan médiateur du segment $[BC]$.
   b) Quelle est la position relative des droites (BC) et (IJ)?
2. Justifier que les droites (AD) et (IJ) sont perpendiculaires.
3. Les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles? Justifier votre réponse.

E.5 On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré $ABCD$ de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée ci-dessous. Toutes les arêtes sont de longueur 1.



1. Justifier que les droites (DE) et (FB) sont parallèles.
2. Justifier que les plans (ABF) et (CED) sont parallèles.

4. *Distance dans l'espace*

E.6

On rappelle les deux formules où A et B sont deux points de l'espace et I est le milieu du segment $[AB]$:

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\,;\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Dans l'espace muni d'un repère $(O\,;I\,;J\,;K)$ orthonormé, on considère quatre points repérés par leurs coordonnées :

$$A(3\,;-1\,;5) \quad ; \quad B(-2\,;2\,;3) \quad ; \quad C(-1\,;-2\,;4) \quad ; \quad D\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;4\right)$$

1. Les points A, B, C sont-ils alignés?
2. Montrer que le triangle ABC est isocèle en C.
3. Justifier que le point D est le pied de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.

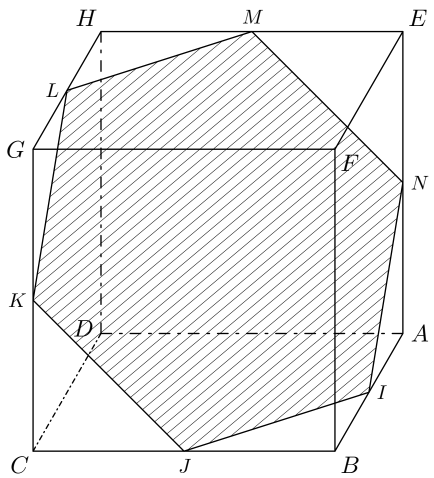
E.7 On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J\,;K)$. On considère les trois points A, B, C définis par leurs coordonnées :

$$A\,(180\,;153\,;96) \quad ; \quad B\,(180\,;135\,;120) \quad ; \quad C\,(190\,;133\,;106)$$

1. Montrer que les points A, B, C appartiennent à une même sphère $\mathscr{S}$ de centre O.
2. Établir que le triangle ABC est rectangle C.
3. a. Est-ce qu'un des côtés du triangle ABC est un diamètre de la sphère $\mathscr{S}$?
   b. Pouvez-vous citer une propriété du plan qui ne peut s'étendre à l'espace?

E.8 Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
On munit l'espace du repère $(C\,;\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CG})$ orthonormal.

Les points I, J, K, L, M, N sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$, $[EA]$.



1. Déterminer les coordonnées des points I, K et L.
2. a. Déterminer les coordonnées du point O milieu du segment $[IL]$.
   b. Déterminer les longueurs OK et KL.
3. On admet que le polygone $IJKLMN$ est un hexagone régulier. Ainsi, le point O est le centre de ce polygone.
   a. Donner la mesure de l'angle $\widehat{KOL}$.
   b. Déterminer l'aire du triangle KOL.

5. *Définition du produit scalaire*

E.9

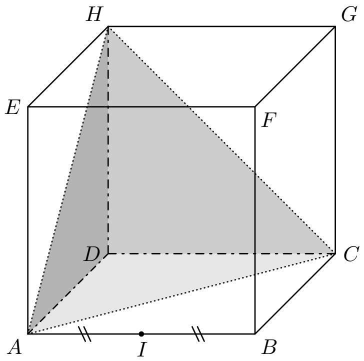
Définition : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est défini par le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ où :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ *(resp.* $\overrightarrow{AC}$*)* est un représentant du vecteur $\vec{u}$ *(resp.* $\vec{v}$*)*.
- le calcul du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ s'effectue dans un plan contenant les points A, B, C.

Proposition : soit A, B, C trois points définissant les deux vecteurs non-nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour valeur :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-contre.

Le point I est le milieu du segment $[AB]$.



1. Déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FB}$
2. Déterminer le produit scalaire : $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$
3. a. Quelle est la nature du triangle ACH?
   b. En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}$?

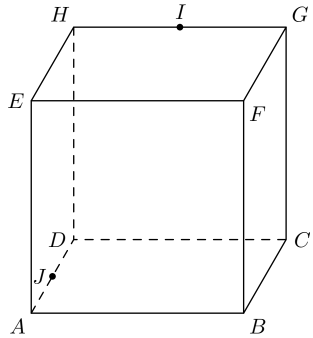
E.10

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls de l'espace.

- les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux entre eux si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires entre eux :
  - $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même sens : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
  - $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de sens contraire : $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-contre où les points I et J sont respectivement les milieux des segments $[GH]$ et $[AD]$.

En utilisant les propriétés du cube et du carré, déterminer la valeur des produits scalaires :



a. $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{DH}$ b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$ c. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{GF}$

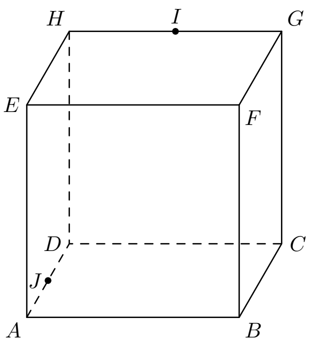
6. *Formule de bilinéarité*

E.11

Proposition : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et k un nombre réel. On a les identités suivantes :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot\left(k\cdot\vec{v}\right) = \left(k\cdot\vec{u}\right)\cdot\vec{v} = k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-contre où les points I et J sont respectivement les milieux des segments $[GH]$ et $[AD]$.



Méthode : dans le calcul de produit scalaire, on utilise la relation de Chasles pour décomposer les deux vecteurs par des vecteurs colinéaires ou orthogonaux entre eux. Cela facilite le calcul des produits scalaires. En voici un exemple :

Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{GF}$, on utilise la décomposition du vecteur $\overrightarrow{IE}$:
$\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HE}$

On peut alors écrire :
$\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{GF} = \left(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HE}\right)\cdot\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{GF}$
$= 0+HE\times GF = 0+1\times 1 = 1$

En utilisant également la relation de Chasles, déterminer la valeur des produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HG}$ b. $\overrightarrow{JF}\cdot\overrightarrow{AB}$ c. $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{EF}$

7. *Calcul de produit scalaire*

E.12 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

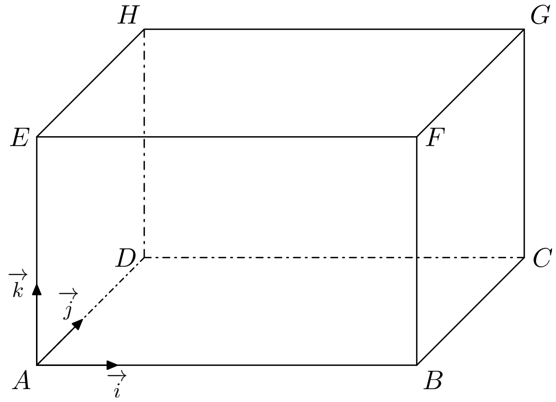
1. On considère les deux vecteurs $\vec{u}\left(1\,;2\,;3\right)$ et $\vec{v}\left(2\,;-1\,;1\right)$, déterminer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
2. On considère les deux vecteurs $\vec{w}\left(-2\,;0\,;1\right)$ et $\vec{t}\left(-1\,;1\,;-1\right)$, déterminer le produit scalaire $\vec{w}\cdot\vec{t}$.

E.13

Proposition : pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} \cdot \left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



On munit l'espace du repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ représenté ci-dessus. On a alors les mesures :

$AB = 10 \quad ; \quad AD = 5 \quad ; \quad AE = 4$

1. Déterminer les valeurs de $\|\overrightarrow{AC}\|$, $\|\overrightarrow{CG}\|$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CG}$.
2. En déduire la mesure de la diagonale $[AG]$.

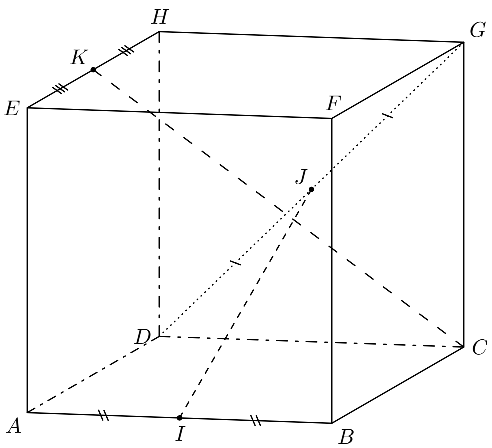
8. *Produit scalaire et orthogonalité*

E.14 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points suivants :

$A\,(6\,;5\,;1) \quad ; \quad B\,(-4\,;2\,;-4) \quad ; \quad C\,(4\,;7\,;2)$

Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en C.

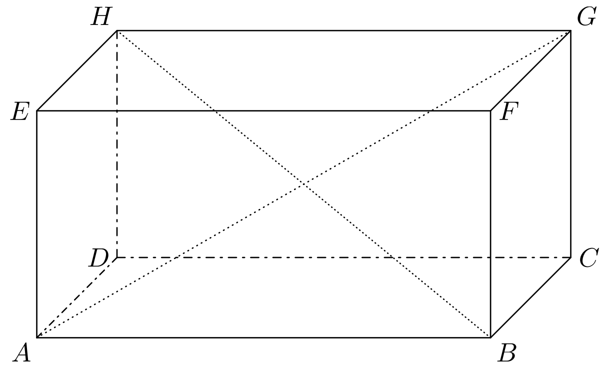
E.15 Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous et où les points I, J, K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[DG]$, $[EH]$.



On considère l'espace muni du repère $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DH}\right)$.
Montrer que les droites (IJ) et (CK) sont orthogonales.

E.16 On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous où :

$AB = a \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad AD = 1 \quad ; \quad AE = 1$



1. Justifier que les droites (HB) et (AG) sont coplanaires.
2. Déterminer la valeur de a afin que les droites (HB) et (AG) sont perpendiculaires.

9. *Déterminer la mesure d'un angle*

E.17 ⚠ L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé direct.
On considère les points :

$A(-2\,;0\,;1) \quad ; \quad B(1\,;2\,;-1) \quad ; \quad C(-2\,;2\,;2)$

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.
2. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.
3. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

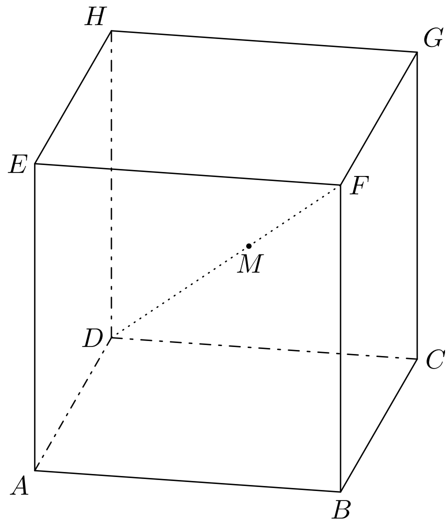
E.18 ⚠ Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les trois points :

$E(2\,;1\,;-3) \quad ; \quad F(1\,;-1\,;2) \quad ; \quad G(-1\,;3\,;1)$

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse :

une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{FEG}$, arrondie au degré, est 50^o.

E.19 On considère un cube $ABCDEFGH$ dont la représentation en perspective cavalière est donnée ci-dessous :



Les arêtes sont de longueur 1. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(D\,;\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DH}\right)$

À tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que :

$\overrightarrow{DM} = x\cdot\overrightarrow{DF}$

On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$.
On a : $0\leqslant\theta\leqslant\pi$

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D? avec le point F?
2. On admet que le point M a pour coordonnées $M\,(x\,;x\,;x)$.

Montrer que : $\cos(\theta)=\dfrac{3\cdot x^2-4\cdot x+1}{3\cdot x^2-4\cdot x+2}$

(On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$)

E.20 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points :

$A\big(5\,;-3\,;1\big)$; $B\big(1\,;2\,;3\big)$; $C\big(4\,;-3\,;-1\big)$

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ puis les longueurs AB et BC.
3. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

E.21 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points :

$A\big(-2\,;4\,;0\big)$; $B\big(8\,;-5\,;1\big)$; $C\big(-3\,;3\,;1\big)$

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ puis les longueurs AB et BC.
3. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

E.22 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points :

$A\big(1\,;-3\,;-5\big)$; $B\big(0\,;2\,;-2\big)$; $C\big(1\,;-3\,;-5\big)$

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ puis les longueurs AB et BC.
3. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

10. *Vecteurs normaux à un plan*

E.23

Définition : soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace admettant les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires pour vecteurs directeurs.
Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est dit **normal** au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé, on considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$A\big(0\,;1\,;-1\big)$; $B\big(1\,;-1\,;-8\big)$; $C\big(-1\,;0\,;0\big)$

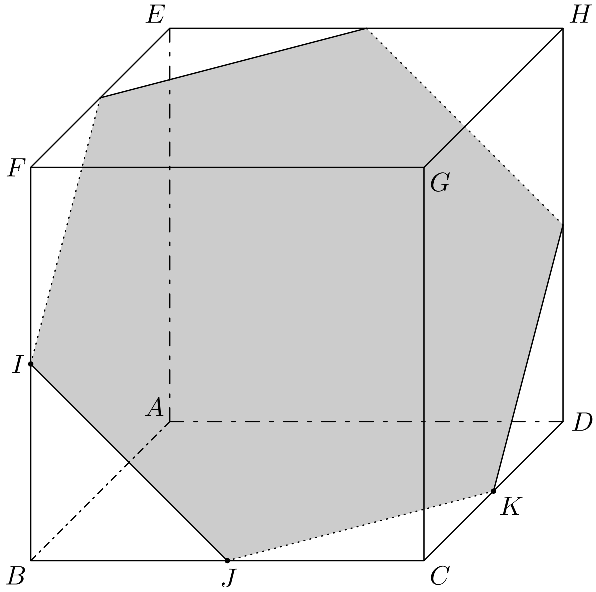
1. Déterminer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{u}$.
2. Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{u}\,\big(3\,;-2\,;1\big)$ relativement au plan (ABC).

E.24 Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé, on considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$A\,\big(1\,;0\,;0\big)$; $B\,\big(1\,;1\,;1\big)$; $C\big(7\,;2\,;-1\big)$

Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u}\,\big(-1\,;2\,;-2\big)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

E.25 $ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[BC]$.
Le point K est le milieu du segment $[CD]$.



Ci-dessus est représenté le plan (IJK).

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées A, G, I, J et K dans ce repère.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

11. *Déterminer un vecteur normal à un plan*

E.26 Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé, on considère un plan $(\mathcal{P})$ admettant les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(2\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{v}\,(2\,;-1\,;-2)$ non colinéaires pour vecteurs directeurs.

Soit $\overrightarrow{n}\,(x\,;y\,;z)$ un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.

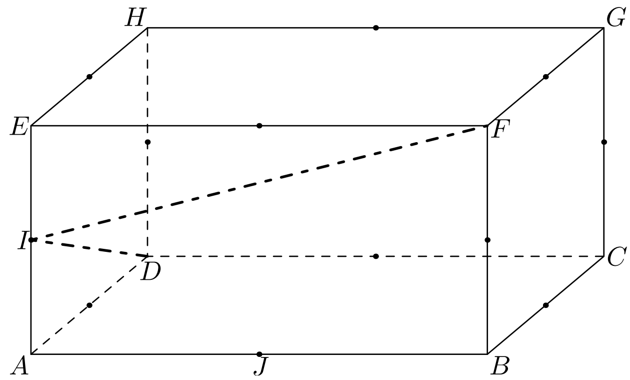
1. Montrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n}$ vérifient le système :
$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$$
2. On note $\overrightarrow{n}'$ le vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$ ayant 1 pour cote et on note ses coordonnées : $\overrightarrow{n'}\,(x'\,;y'\,;1)$
   a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n}'$.
   b. Proposer un vecteur $\overrightarrow{n}''$ normal au plan $(\mathcal{P})$ à coordonnées entières.

E.27 L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

Pour chacune des questions, déterminer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ non-nul et orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$\overrightarrow{u}\,(5\,;0\,;1)$ et $\overrightarrow{v}\,(-1\,;1\,;2)$.

E.28 On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AE]$ et $[AB]$. Les milieux des différentes arêtes sont représentés sur la figure.

1. Représenter la section du plan (DIF) et du parallélépipède. Justifier votre construction.
2. On munit le plan du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AJ}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ orthonormé. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$, à coordonnées entières, normal au plan (DIF).

12. *Projeté orthogonal sur un plan*

E.29

Définition - proposition :
Dans l'espace muni, on considère un point A et un plan $(\mathcal{P})$. On appelle **projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$**, l'unique point M intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la droite passant par le point A et orthogonale au $\mathcal{P}$

Corollaire : dans l'espace, on considère un point A et un plan $(\mathcal{P})$. Le projeté H du point A sur le plan $(\mathcal{P})$ est l'unique point du point $(\mathcal{P})$ tel que la droite (AH) est orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

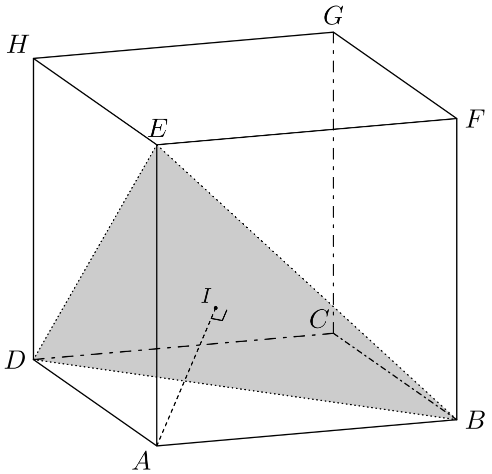
$ABCDEFGH$ est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le point I de coordonnées $I\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

1. a. Établir l'égalité : $\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DI}$

   b. Montrer que le point I appartient au plan (BDE).

2. Montrer que le point I est le projeté du point A sur le plan (BDE).



E.30 Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé, on considère le point $M(5\,;2\,;-1)$ et le plan $(\mathcal{P})$ passant par le point $A(5\,;-6\,;-6)$ et admettant le vecteur $\vec{n}\,(2\,;1\,;2)$ pour vecteur normal.

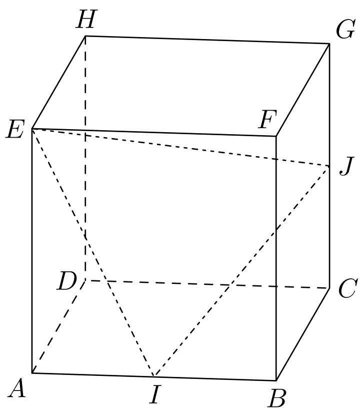
Montrer que le point $H\,(1\,;0\,;\,-5)$ est le projeté orthogonal du point M sur le plan $(\mathcal{P})$.

E.31 On considère le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1,

et on note I et J les milieux des arêtes $[AB]$ et $[CG]$. On utilisera le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$

On note M le point de coordonnées :

$M\left(\frac{1}{2}\,;\frac{2}{5}\,;\frac{4}{5}\right)$



1. Montrer que le point M est le projeté du point I sur le plan (EFJ)

2. Montrer que le volume du tétraèdre $EFIJ$ est égal à $\frac{1}{6}$.

E.32 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(1\,;2\,;3)$ et le plan $\mathcal{P}$ admettant pour équation :

$\mathcal{P}:\;2\cdot x-2\cdot y-4\cdot z+2=0$

Démontrer que le point $H(2\,;1\,;1)$ est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

E.33 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(2\,;-3\,;2)$ et le plan $\mathcal{P}$ admettant pour équation :

$\mathcal{P}:\;-6\cdot x+4\cdot y+z-5=0$

Démontrer que le point $H(-1\,;-1\,;3)$ est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

E.34 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(1\,;2\,;2)$ et le plan $\mathcal{P}$ admettant pour équation :

$\mathcal{P}:\;x+2\cdot y+3\cdot z-5=0$

Démontrer que le point $H\left(\frac{4}{7}\,;\frac{8}{7}\,;\frac{5}{7}\right)$ est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

E.35 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(3\,;3\,;3)$ et le plan $\mathcal{P}$ admettant pour équation cartésienne :

$2\cdot x-y+z+1=0$

Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

E.36 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A\left(\frac{8}{3}\,;\frac{4}{3}\,;-\frac{8}{3}\right)$ et le plan $\mathcal{P}$ admettant pour équation cartésienne :

$x+2\cdot y-z+2=0$

Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

E.37 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(2\,;-3\,;-3)$ et le plan $\mathcal{P}$ admettant pour équation cartésienne :

$-2\cdot x+y+4\cdot z-2=0$

Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

E.38 a faire

c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.

   On rappelle que le point B(−1 ; 3 ; 0) appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

   a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB}=k\vec{u}$.

   b. Montrer que $k=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$.

   c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$.

   Calculer l'aire du triangle ACH.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

13. *Distance à un plan*

E.39

Proposition : dans l'espace muni, on considère un point A et un plan $(\mathcal{P})$. On note H le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$. La distance AH a pour valeur :

$$AH = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|}$$

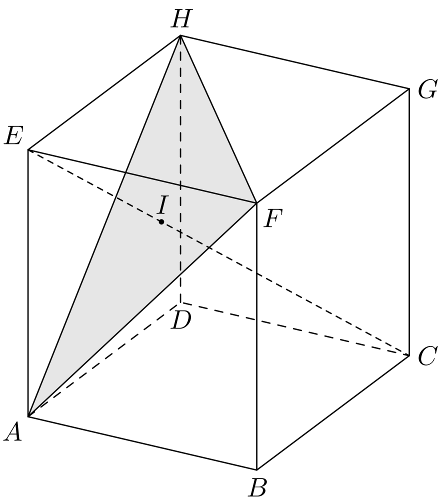
Définition : dans l'espace, on considère un point A et un plan $(\mathcal{P})$, on appelle **distance du point A au plan $(\mathcal{P})$**, la distance du point AH où le point H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{l}\right)$ orthonormé, on considère les quatre points :
$A(2\,;2\,;0)$; $B(4\,;-4\,;1)$; $C(5\,;-2\,;-1)$; $M(6\,;4\,;4)$

1. Montrer que les points A, B, C sont non-alignés.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(2\,;1\,;2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
3. Déterminer la distance du point M au plan (ABC).

E.40 *On considère un cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).*

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous et on utilise le repère $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DH}\right)$ orthonormé.



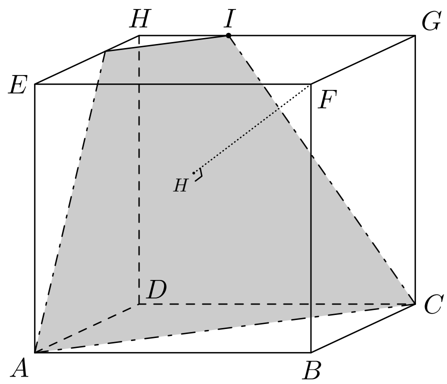
On note I le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

1. Justifier que la droite (EC) est orthogonale au plan (AHF).
2. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

E.41

Proposition : Le projeté orthogonal H d'un point A sur un plan $\mathcal{P}$ est l'unique point du plan $\mathcal{P}$ le plus proche de A.

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous et l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.



On note I le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;1\,;1\right)$ et la section par le plan (FHI) est représenté grisé.

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3\,;-3\,;2)$ est normal au plan (ACI)
2. Déterminer la distance du point F au plan.
3. On note H le projeté orthogonal du point F sur le plan (ACI). Montrer que le point H a pour coordonnées :
$$H\left(\frac{7}{22}\,;\frac{15}{22}\,;\frac{12}{22}\right)$$

14. *Projeté orthogonal sur une droite*

E.42

Définition - proposition :
Dans l'espace, on considère un point A et une droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. On appelle **projeté orthogonal du point A sur la droite (d)**, le point d'intersection de la droite (d) avec le plan passant par le point A et admettant $\overrightarrow{u}$ pour vecteur normal.

Corollaire : dans l'espace, on considère une droite (d) et un point A n'appartenant pas à (d). Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est l'unique point M appartenant à (d) et tel que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal à tout vecteur directeur de la droite (d).

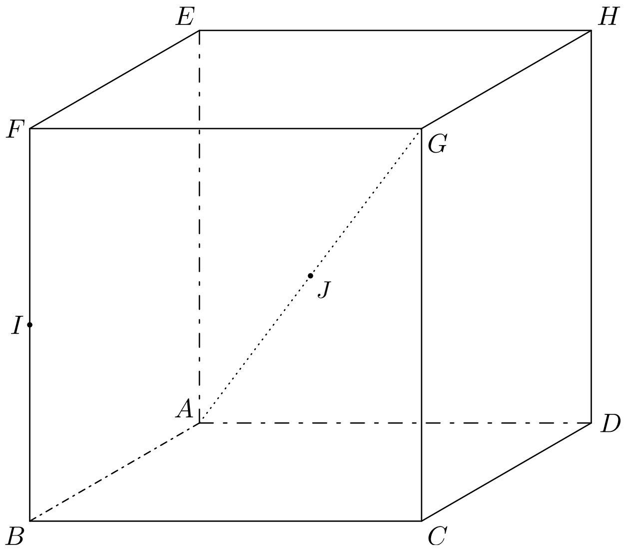
Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé, on considère les trois points :
$A(7\,;3\,;0)$; $B(6\,;-1\,;-8)$; $C(-4\,;4\,;2)$

On considère le point $H(2\,;1\,;-4)$.

1. Montrer que le point H appartient à la droite (BC).
2. Établir que H est le projeté orthogonal du point A sur

la droite (BC).

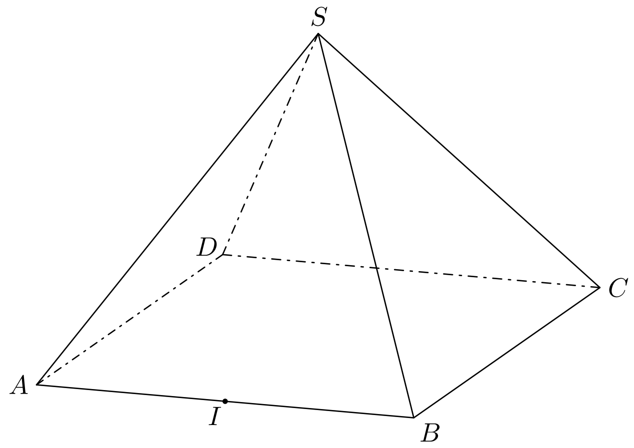
E.43 $ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1, le point I est le milieu du segment $[BF]$ et le point J est le milieu du segment $[AG]$.



L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Établir que le point J est le projeté du point I sur la droite (AG).
2. Déterminer la distance IJ.

E.44 Dans l'espace, on considère la pyramide $ABCDS$ à base carrée avec ses faces latérales qui sont toutes des triangles équilatéraux. On note I le milieu du segment $[AB]$.



On munit l'espace du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé direct.

1. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{CS}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{CS}\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

On note $H(x\,;y\,;z)$ le projeté orthogonal du point A sur la droite (CS).

2. Justifier qu'il existe un réel k permettant d'écrire les coordonnées du point H : $H\left(-\frac{1}{2}\cdot k+1\,;-\frac{1}{2}\cdot k+1\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot k\right)$
3. En déduire les coordonnées du point H.

15. *Distance à une droite*

E.45

Proposition : dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère une droite (d) passant par un point A et admettant $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur et B un autre point du plan. En notant H le projeté du point B sur la droite (d), on a :

$$BH=\left\|\overrightarrow{BA}-\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{u}}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2}\,\overrightarrow{u}\right\|$$

Définition : dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère une droite (d) et un point B de l'espace. On appelle **distance du point B à la droite (d)**, la distance BH où H est le projecté du point B sur la droite (d).

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé et on considère les points A, B et C dont les coordonnées sont :

$A(5\,;0\,;1)$; $B(-5\,;2\,;8)$; $C(7\,;-4\,;-4)$

Établir que le point A est à une distance de 3 de la droite (BC).

E.46

Proposition : le projeté orthogonal H du point A sur la droite (d) est l'unique point de la droite (d) le plus proche du point A.

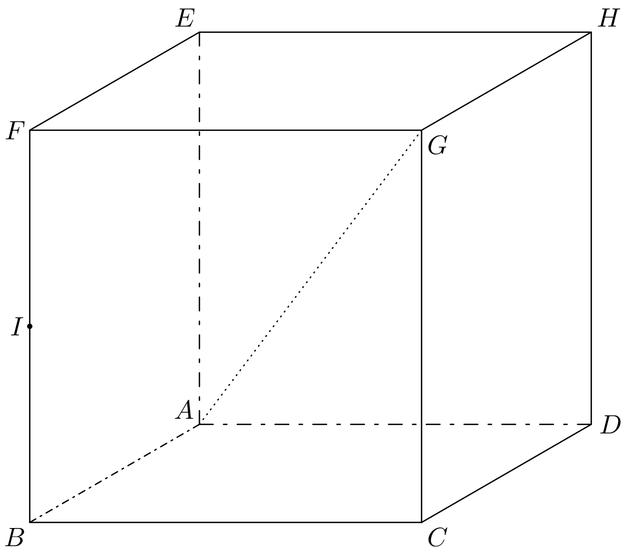
L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé et on considère les points A, B et C dont les coordonnées sont :

$A(3\,;4\,;-7)$; $B(-5\,;-1\,;-6)$; $C(-1\,;-3\,;-2)$

On désigne par H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

1. Déterminer la distance du point A à la droite (BC).
2. Établir que le point H a pour coordonnées : $H(-3\,;-2\,;-4)$

E.47 $ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1, le point I est le milieu du segment $[BF]$.



L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

Déterminer la distance du point I à la droite (AG).

E.48 On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté sur la feuille annexe. Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au rep'ère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.

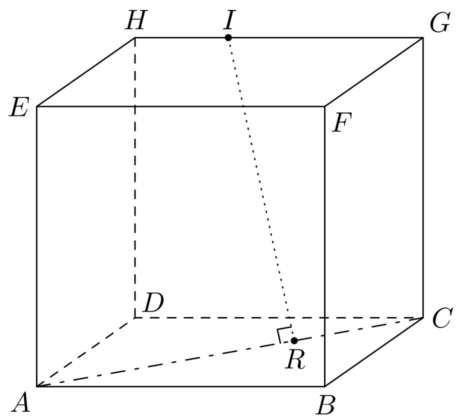
On note I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;1\,;1\right)$ et R le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).

1. Établir que : $IR=\frac{\sqrt{11}}{3}$.

2. Le point R appartenant à la droite (AC), il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AR}=t\cdot\overrightarrow{AC}$

   a. Exprimer les coordonnées du point R en fonction de t.

   b. À l'aide de la question 1, déterminer les coordonnées du point R.



E.49 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$A(1\,;-2\,;4)$; $B(-2\,;-6\,;5)$; $C(-4\,;0\,;-3)$

On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).
Soit t le réel tel que : $\overrightarrow{BH}=t\cdot\overrightarrow{BC}$

1. Démontrer que : $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$

2. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

16. Produit scalaire et relation vectorielle

E.50 On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

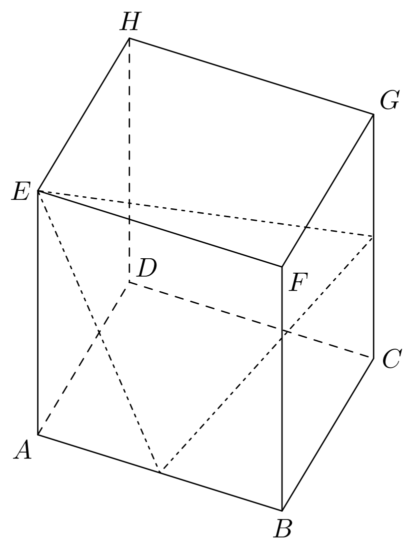
Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre $ABCD$ issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

17. Exercices non-classés

E.51 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 3.

On choisit le repère orthonormé $\left(D\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ tel que :

$\overrightarrow{i}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{j}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{k}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DH}$



1. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C\,;2)\,;\,(E\,;1)\}$.

On admet que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ ont les coordonnées suivantes :
$\overrightarrow{AE}\,(0\,;0\,;3)$; $\overrightarrow{DL}\,(1\,;2\,;1)$

Soit $(a\,;b)$ un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que : $\overrightarrow{AM}=a\cdot\overrightarrow{AE}$
et N le point de la droite (DL) tel que : $\overrightarrow{DN}=b\cdot\overrightarrow{DL}$

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple $(a\,;b)$vérifie le système :
$$\begin{cases} -a+2b=1 \\ 3a-b=0 \end{cases}$$

3. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

4. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

E.52 L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

La sphère de centre $A(1\,;1\,;1)$ et de rayon 10 est tangente au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z=0$.

E.53 On considère l'espace muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{j})$ orthonormé.

On considère la droite (d) passant par le point $A(1\,;-2\,;3)$ et admettant le vecteur $\vec{u}\,(-2\,;0\,;1)$ pour vecteur directeur.
Soit M le point de l'espace de coordonnées $(1\,;-1\,;13)$, déterminer les coordonnées du projeté H du point M sur la droite (d).

E.54 On considère l'espace muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{j})$ orthonormé.

Soit $(\mathcal{P})$ le plan admettant pour équation cartésienne :
$3\cdot x-y+2\cdot z=0$
On considère le point $N(15\,;1\,;6)$. Déterminer les coordonnées du point I projeté orthogonal du point N dans le plan $(\mathcal{P})$.

