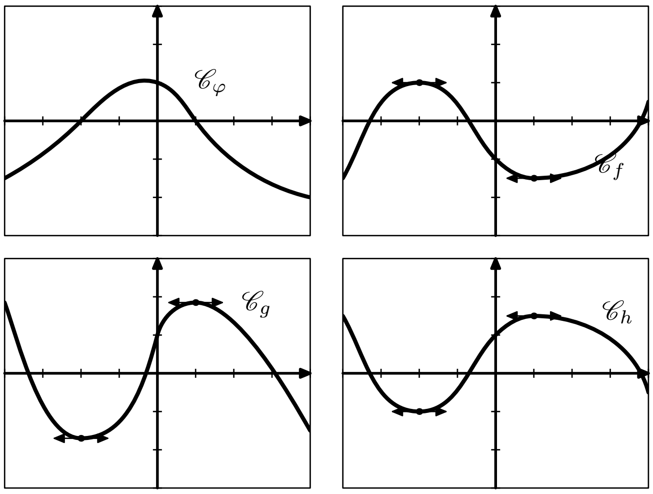
Terminale Spécialité / Primitives et équations différentielles

1. *Introduction aux primitives*

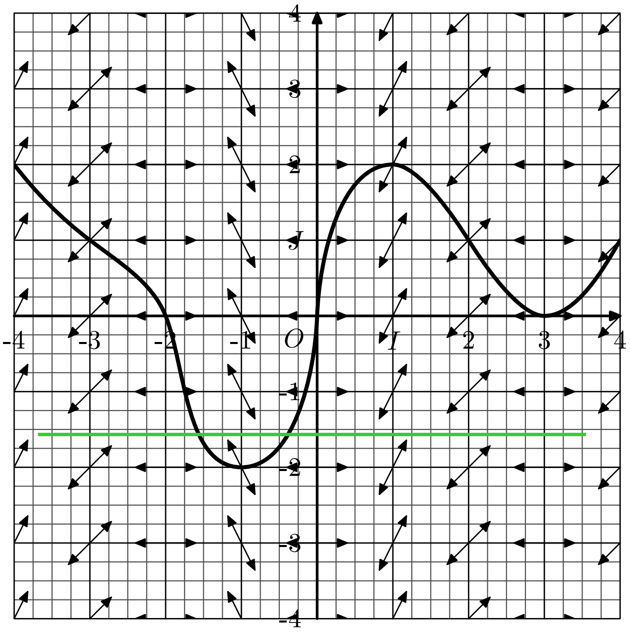
E.1 On considère quatre fonctions φ, f, g, h définies sur l'intervalle $[-4\,;4]$. Leurs courbes représentatives sont données, ci-dessous, dans un même repère orthonormé :



Quelle fonction, parmi f, g et h, peut admettre la fonction φ comme fonction dérivée?

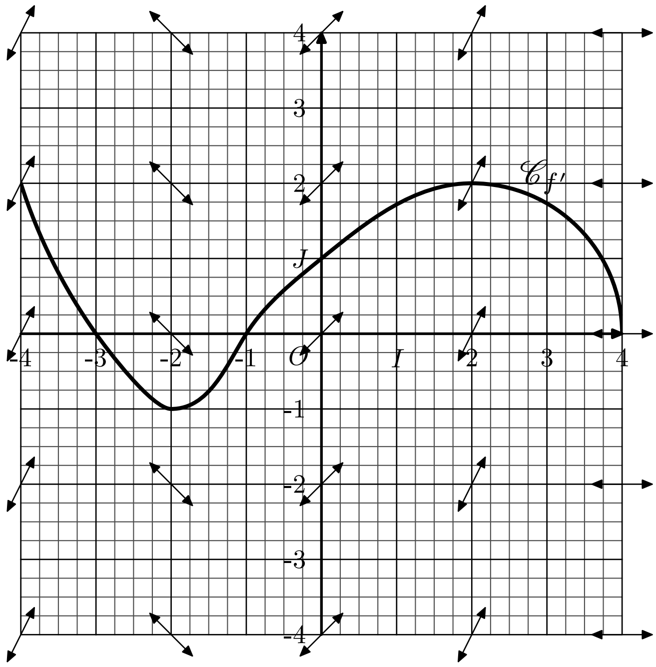
E.2 Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\,;4]$ et admettant la fonction f' comme dérivée.

Dans le repère ci-dessous, est tracée la courbe représentative de la fonction f'.



1. a) Quelle est la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 1?
   b) Donner le coefficient directeur de toutes les tangentes représentées sur la droite d'équation $x=1$.
2. Tracé une représentation "*possible*" de la fonction f dans ce repère.

E.3 On considère une fonction f dérivable sur $[-4\,;4]$. Dans le repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$ ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_{f'}$ de la fonction f' dérivée de la fonction f.



1. a) Quelle est le nombre dérivé de la fonction f en -2?
   b) Tout au long de la droite d'équation $x=-2$ sont représentés des tangentes ; quel est le coefficient de ces tangentes.
2. Tracer une courbe représentative $\mathscr{C}_f$ acceptable de la fonction f dont les tangentes aux points d'abscisses -4, -2, 0, 2, 4 sont, dans chaque cas, une des tangentes proposées sur le graphique.

2. *Equation différentielle : $y' = f$*

E.4 Compléter les pointillés :

1. On note f une fonction vérifiant : $f'(x)=2{\cdot}x$.
   Une expression possible de f est :

   $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. On note g une fonction vérifiant : $g'(x)=x^2$.
   Une expression possible de g est :

   $g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. On note h une fonction vérifiant : $h'(x)=-2$.

Une expression possible de h est :

$h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(4) On note j une fonction vérifiant : $j'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
Une expression possible de j est :

$j(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(5) On note k une fonction vérifiant : $k'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Une expression possible de k est :

$k(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(6) On note ℓ une fonction vérifiant : $\ell'(x) = \mathrm{e}^x$.
Une expression possible de ℓ est :

$\ell(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(7) On note m une fonction vérifiant : $m'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Une expression possible de m est :

$m(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

E.5 Pour chaque question, déterminer l'expression d'une fonction f admettant pour dérivée l'expression proposée :

(a) $f'(x) = 3$ (b) $f'(x) = 2x + 1$ (c) $f'(x) = x^3$

(d) $f'(x) = -\dfrac{2}{x}$ (e) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (f) $f'(x) = \mathrm{e}^{2x}$

E.6 Donner une primitive de chacune des fonctions ci-dessous :

(a) $f(x) = 2{\cdot}x + 1$ (b) $g(x) = 1 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

(c) $h(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ (d) $j(x) = \mathrm{e}^{2\cdot x}$

3. Détermination d'une primitive d'une fonction de référence

E.7 Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = 2x + 1$ (b) $g(x) = 1 - 3x$ (c) $h(x) = 2x^2$

(d) $i(x) = x^2 + x + 1$ (e) $j(x) = 4x^3$ (f) $k(x) = 1 - 2x^2$

E.8 Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ (b) $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$ (c) $h(x) = \dfrac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$

(d) $j(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ (e) $k(x) = \dfrac{1}{x}$ (f) $\ell(x) = -\dfrac{1}{2x}$

(g) $m(x) = \mathrm{e}^x$ (h) $n(x) = 3\mathrm{e}^x$ (i) $p(x) = -\mathrm{e}^x$

4. Détermination d'une primitive de la composée de fonctions

E.9 Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = (x+3)^4$ (b) $g(x) = (2-x)^3$

(c) $h(x) = (2x-3)^2$ (d) $j(x) = x{\cdot}(x^2+1)^6$

(e) $k(x) = 3x^2{\cdot}(x^3-2)^3$ (f) $\ell(x) = x^4{\cdot}(1-x^5)^2$

E.10 Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = 3x - 5x^5$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x} - x$

(c) $h(x) = x{\cdot}\big(2x^2-3\big)^4$ (d) $j(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{x^2-4x}}$

(e) $k(x) = \dfrac{6x+2}{3x^2+2x-3}$ (f) $\ell(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{x^2}$

E.11 Déterminer une primitive des fonctions ci-dessous :

(a) $f(x) = \dfrac{2}{2x+3}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{1-3x}$

(c) $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (d) $j(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$

(e) $k(x) = \dfrac{2}{(3x+1)^2}$ (f) $\ell(x) = \dfrac{x}{x^4+2x^2+1}$

E.12 Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On définit la fonction g sur l'intervalle I par :

$g(x) = f\big(3{\cdot}x\big)$ pour $x \in I$

On note F et G les primitives respectivement des fonctions f et g sur l'intervalle I.

Parmi les relations ci-dessous, laquelle est vérifiée par les fonctions F et G :

(a) $G(x) = F(x) + 3$ (b) $G(x) = \dfrac{1}{3}{\cdot}F(x)$

(c) $G(x) = F(x) - 3$ (d) $G(x) = 3{\cdot}F(x)$

5. Quelques primitives particulières

E.13

(1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x) = \big(x-1\big){\cdot}\mathrm{e}^x$

Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. En déduire l'expression d'une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = x \cdot e^x$

E.14

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par l'expression : $f(x) = \dfrac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x}$
Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

2. En déduire l'expression d'une primitive de la fonction racine carrée.

6. Recherche d'une primitive

E.15 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$$

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

2. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

7. Détermination d'une primitive avec condition initiale

E.16 Pour chaque question, déterminer la primitive de la fonction vérifiant la condition proposée :

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2 \cdot x + 4}{x}$; $F(1) = 2$

b. ~~$g(x) = x \cdot e^{x^2}$; $G(1) = 3 \cdot e$~~

c. $h(x) = \dfrac{5}{(4 \cdot x - 3)^2}$; $H(1) = 1$

d. $j(x) = \dfrac{2 \cdot x - 3}{x^2 - 2x + 1}$; $J(0) = -2$

E.17 On considère les deux fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \ln(x^2+1)$; $g(x) = \ln(2 \cdot x^2 + 2)$

1. Déterminer l'image de 0 par chacune de ces deux fonctions.

2. Établir que ces deux fonctions sont des primitives d'une même fonction qu'on précisera.

8. Equations différentielles : exemples de solutions

E.18 ⚠ On considère l'équation différentielle :
(E) : $y' + y = e^{-x}$

Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x \cdot e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle.

E.19

1. Déterminer l'expression de la fonction f vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

Justifier votre réponse.

2. Déterminer l'expression de la fonction g vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} g' = 2 \cdot g \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Justifier votre réponse.

3. Déterminer l'expression de la fonction h vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} h' = 2 \cdot h \\ h(0) = 2 \end{cases}$$

Justifier votre réponse.

E.20

1. On considère l'équation différentielle :
   (E) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$

   Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :
   $u(x) = x\cdot\mathrm{e}^{-x}$
   est une solution de l'équation différentielle (E).

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x) = \dfrac{9}{2}\cdot\mathrm{e}^{-2x} - 3\cdot\mathrm{e}^{-3x}$

   Montrer que la fonction f vérifie l'équation différentielle :
   $y' + 2y = 3\cdot\mathrm{e}^{-3x}$

E.21 On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ vérifiant la condition (E) :

pour tout nombre réel x strictement positif :
$x\cdot f'(x) - f(x) = x^2\cdot\mathrm{e}^{2x}$

1. Montrer que si une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
   $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$
   vérifie :
   (E) : $\begin{cases} \text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif :} \\ \quad g'(x) = \mathrm{e}^{2x} \end{cases}$

2. Conjecturer l'expression des fonctions g vérifiant :
   $g'(x) = \mathrm{e}^{2x}$

3. Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$?

E.22 Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = x + \dfrac{1 - k\cdot\mathrm{e}^x}{1 + k\cdot\mathrm{e}^x}$

1. Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle :
   (E) : $2\cdot y' = (y - x)^2 + 1$.

2. En déduire le sens de variations de f_k sur $\mathbb{R}$.

E.23 On considère l'équation différentielle :
$y' + \dfrac{3\cdot y}{x} = 1$
et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{x}{4}$

Montrer que la fonction f est une solution de cette équation différentielle.

E.24 On considère l'équation différentielle : $2\cdot y' + x\cdot y = 0$

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ci-dessous est solution de cette équation différentielle :

$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$

9. *Equations differentielles : $y' = ay$*

E.25 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a. $y' = -3y$ b. $y' - y = 0$

c. $5y' - 2y = 0$ d. $y = -3y'$

E.26 Pour chaque question, déterminer la valeur de $a \in \mathbb{R}$ afin que la fonction f soit une solution de l'équation différentielle :
$y' = a\cdot y$

a. $f(x) = -3\cdot\mathrm{e}^{4x}$ b. $f(x) = 4\cdot\mathrm{e}^{0,2x}$

E.27 Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

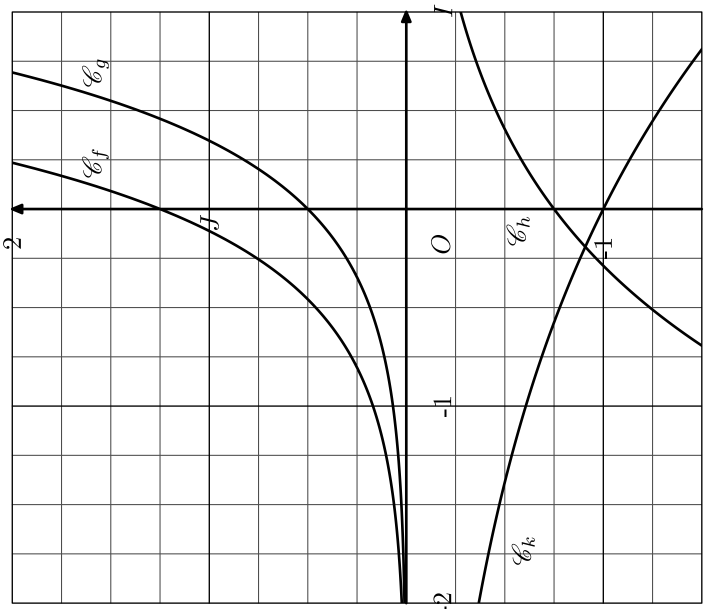
a. $y' - 3y = 0$; $f(0) = 2$

b. $2y' + 3y = 0$; $f(0) = -1$

c. $3y' - 2y = 0$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2$

d. $y - 3y' = 0$; $f(6) = \mathrm{e}^3$

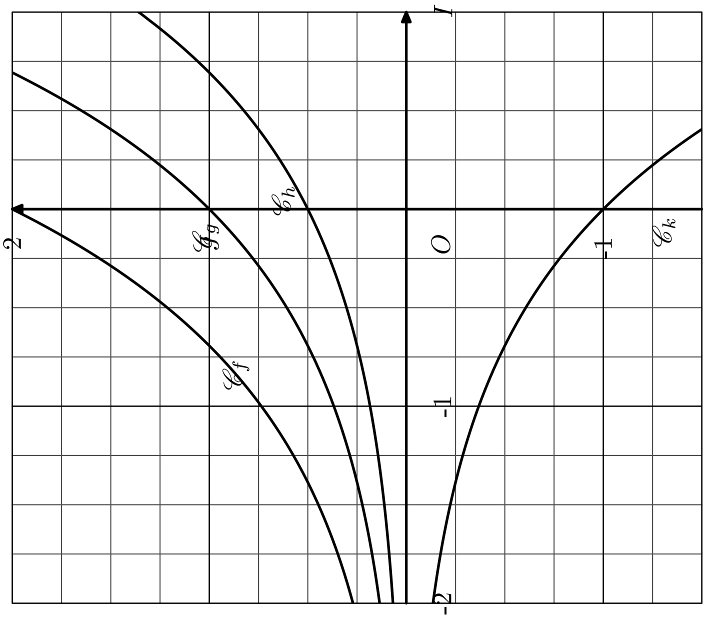
E.28 Dans le repère ci-dessous est représentée quatre courbes représentatives de fonctions vérifiant l'équation différentielle :
$y' = a\cdot y$ pour $a \in \mathbb{R}$



En observant les tangentes à ces courbes au point d'abscisse 0, déterminer l'équation différentielle vérifiée par chacune de ces fonctions.

E.29 Dans le repère ci-dessous est représentée quatre courbes représentatives de fonctions vérifiant l'équation différentielle :

$$y' = y$$



Déterminer les conditions initiales définissant chacune de ses fonctions.

10. *Equations differentielles : $y' = ay + b$*

E.30 Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' + y = 2$

b) $y' - 3{\cdot}y = -3$

c) $6{\cdot}y = 3{\cdot}y' + 2$

d) $5{\cdot}y = \dfrac{3}{2}{\cdot}y' + \dfrac{1}{3}$

E.31 Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $4{\cdot}y' - y = 4 \quad ; \quad y(1) = e$

b) $15{\cdot}y' + 24{\cdot}y = 12 \quad ; \quad y\left(\dfrac{5}{4}\right) = 2$

c) $-\dfrac{3}{2}{\cdot}y' + \dfrac{1}{4}{\cdot}y = -1 \quad ; \quad y(3) = 6 + 2{\cdot}e$

11. *Equations différentielles : $y' = ay + f$*

E.32 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}$

Vérifier que f est solution de l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$$

E.33 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-2x}{\cdot}\ln\left(1 + 2{\cdot}e^x\right)$$

On considère l'équation différentielle :

$$(E) :\ y' + 2{\cdot}y = 2{\cdot}\frac{e^{-x}}{1 + 2{\cdot}e^x}$$

1. Vérifier que la fonction f est solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle : $(E') :\ y' + 2y = 0$.
3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

E.34 On considère les deux équations différentielles :

$$(E) :\ y' + y = e^{-x}$$

$$(E') :\ y' + y = 0$$

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x{\cdot}e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E').
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

E.35 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\frac{9}{2}\cdot e^{-2x}-3\cdot e^{-3x}$

Soit l'équation différentielle : (E) : $y'+2y=3e^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle : (E') : $y'+2y=0$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x)=\frac{9}{2}\cdot e^{-2x}$ est solution de (E').
3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x)=-3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
4. En remarquant que $f=g+h$, montrer que f est une solution de (E).

E.36 La fonction f est définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
$f(x)=\left(20x+10\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) :
(E) : $y'+\frac{1}{2}y=20\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$

1. Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
   a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ de l'équation différentielle :
   (E') : $y'+\frac{1}{2}\cdot y=0$
   b. Résoudre l'équation différentielle (E').
   c. Conclure.

E.37 **Partie A - Résolution d'une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle : $y'-2y=e^{2x}$, (E)

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :
$u(x)=x\cdot e^{2x}$
est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle :
$y'-2\cdot y=0 \quad (E_0)$
3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Partie B - Etude d'une fonction

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\left(x+1\right)\cdot e^{2x}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

Partie C - Résolution d'une équation

1. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $\left[0{,}2\,;0{,}3\right]$.
2. Recopier, puis compléter le tableau suivant :

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$						

Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec une précision de 10^{-2} près par défaut.

3. Sur le papier millimétré ci-dessous, où les unités sont de $10\,cm$ en abscisses et $5\,cm$ en ordonnées, tracer l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ pour x appartenant à $\left[0\,;0{,}3\right]$.
Faire apparaître x_0 sur le graphique.

E.38 On cherche à résoudre l'équation différentielle :
(1) : $y'-2y=x\cdot e^x$

1. Résoudre l'équation différentielle :
(2) : $y'-2y=0$,
où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soit a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$u(x)=\left(a\cdot x+b\right)\cdot e^x$
   a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
   b. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u+v$ est solution de (1).
   c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).
3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

E.39 On considère l'équation différentielle : $(E)\colon\ y'=2\cdot y+\cos x$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x)=a\cdot\cos x+b\cdot\sin x$ soit une solution f_0 de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle : $(E_0)\colon\ y'=2\cdot y$.
3. Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f-f_0$ est solution de (E_0).
4. En déduire les solutions de (E).
5. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

E.40 On considère une l'équation différentielle :

$$(E)\colon\ y'-3y=\frac{-3e}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}$$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\mathrm{e}^{-3x}\cdot\varphi(x)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x)-3\cdot\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.
2. Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\varphi(0)=\dfrac{e}{2}$.

12. *Autres équations différentielles*

E.41 *On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.*

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x=0$ en 2005, $g(0)=1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $\left[0\,;+\infty\right[$ de l'équation différentielle :

$$(E)\colon\ y'=\frac{1}{20}\cdot y\cdot(10-y)$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et on pose $z=\dfrac{1}{y}$
   a. Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle :
   $$(E_1)\colon\ z'=-\frac{1}{2}\cdot z+\frac{1}{20}$$
   b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).
2. Montrer que g est définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
   $$g(x)=\frac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+1}$$
3. Etudier les variations de g sur $\left[0\,;+\infty\right[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions?

E.42 En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t *(exprimé en années)* dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2)\ \begin{cases} u'(x) = \dfrac{u(t)}{4}-\dfrac{\left[u(t)\right]^2}{12} & \text{pour } t\in\mathbb{R}_+^* \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

1. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t)>0$. On considère, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, la fonction h définie par $h=\dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement, si la fonction h satisfait aux conditions :
   $$(E_3)\ \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}\cdot h(t)+\dfrac{1}{12} & \text{pour } t\in\mathbb{R}_+^* \\ h(0) = 1 \end{cases}$$
   où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.
2. Donner les solutions de l'équation différentielle :
   $$y'=-\frac{1}{4}\cdot y+\frac{1}{12}$$
   et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.
3. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

E.43 On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ vérifiant l'équation différentielle : $(E)\ :\ x\cdot f'(x)-(2x+1)\cdot f(x)=8\cdot x^2$

1. a. Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par :
   $$g(x)=\frac{f(x)}{x}$$
   est solution de l'équation différentielle :
   $$(E')\colon\ y'=2\cdot y+8$$
   b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x)=x\cdot h(x)$ est solution de (E).
2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

E.44

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ vérifiant pour tout nombre réel x strictement positif :
$$x f'(x) - f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$$
Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$
Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a :
$$g'(x) = e^{2x}$$

2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$$h(x) = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{e}{2} x$$
Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x, le signe de $h(x)$.

E.45 On appelle (E) l'équation différentielle : $y'' - y = 0$,
où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Déterminer les réels r tels que la fonction h, définie par $h(x) = e^{r \cdot x}$, soit solution de (E).

2. Vérifier que les fonctions φ définies par $\varphi(x) = \alpha \cdot e^{x} + \beta \cdot e^{-x}$, où α et β sont deux nombres réels, sont des solutions de (E). On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E).

3. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $\left(\ln 2\,; \dfrac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $\dfrac{5}{4}$.

13. *Exercices non-classés*

E.46 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$f(x) = 2 \cdot x \cdot \ln(x)$$
La primitive F de la fonction f telle que $F(1) = -\dfrac{1}{2}$ admet pour expression :

a. $F(x) = x^2 \cdot \ln(x) - \dfrac{1}{2} \cdot x$
b. $F(x) = x \cdot \ln(x) - \dfrac{1}{2} \cdot x^2$
c. $F(x) = x \cdot \ln(x) - \dfrac{1}{2} \cdot x$
d. $F(x) = x^2 \cdot \ln(x) - \dfrac{1}{2} \cdot x^2$

E.47 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$f(x) = \left(x^2 - 2\right) \cdot e^{x}$$
La primitive F de la fonction f telle que $F(1) = -\dfrac{1}{2}$ admet pour expression :

a. $F(x) = \left(x^2 - 2\right) \cdot e^{x}$
b. $F(x) = \left(x^2 - 2 \cdot x\right) \cdot e^{x}$
c. $F(x) = \left(x^3 - 2\right) \cdot e^{x}$
d. $F(x) = \left(x^3 - 2 \cdot x\right) \cdot e^{x}$

