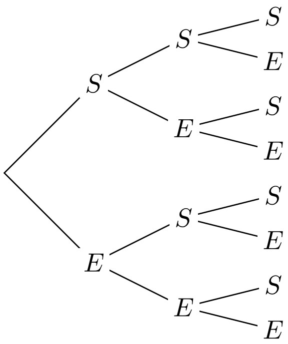
Terminale Spécialité / Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Chapitre à finir

1. *Répétitions indépendantes d'épreuves de Bernoulli*

E.1

On considère une épreuve admettant que deux issues : une nommée "*succès*" et notée S de probabilité 0,4 ; l'autre nommé "*échec*" et notée E.



On décide de répéter trois fois cette même épreuve. On obtient l'arbre de probabilité ci-contre.

On suppose ces répétitions indépendantes entre elles.

1. Compléter cet arbre de probabilité?

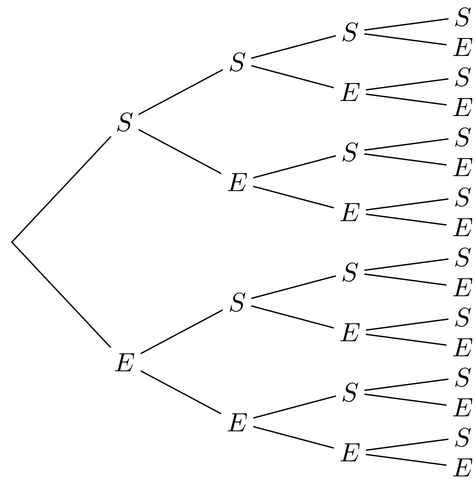
2. a. Combien de chemins comportent 3 succès?
   b. Donner la probabilité d'obtenir trois succès à l'issue de cette expérience aléatoire?

3. a. Combien de chemins comportent 0 succès?
   b. Donner la probabilité de n'obtenir aucun succès à l'issue de cette expérience aléatoire?

4. a. Combien de chemins comportent 2 succès?
   b. Donner la probabilité d'obtenir exactement deux succès à l'issue de cette expérience aléatoire?

E.2 On considère une épreuve comportant que deux issues : une issue de probabilité 0,3 notée S ; l'autre issue est notée E.

On considère l'expérience aléatoire composée de quatre répétitions de l'épreuve précédente. Cette nouvelle expérience aléatoire est représentée par l'arbre de choix ci-dessous :



1. Combien d'événements élémentaires composent cette expérience aléatoire?

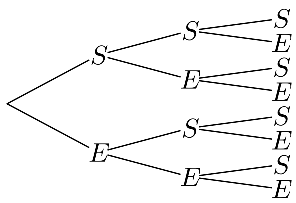
2. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque événement élémentaire, compte le nombre d'événements S réalisés.

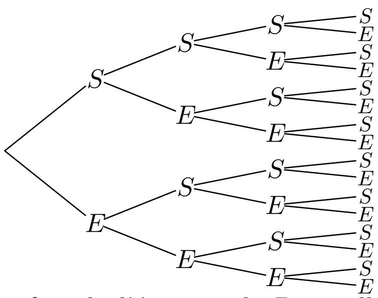
   Déterminer les probabilités suivantes arrondies au millième :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$

2. *Coefficients binomiaux*

E.3 Voici les arbres de choix associés à la répétition d'une épreuve de Bernoulli respectivement 3 et 4 fois :





1. Pour la répétition trois fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3
Nombre d'issues				

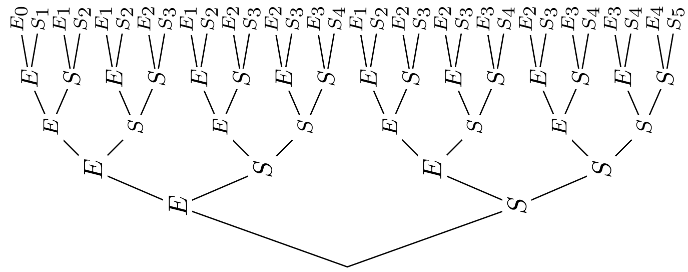
2. Pour la répétition quatre fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4
Nombre d'issues					

3. Y a-t-il une méthode pour obtenir le second tableau à partir du premier?

E.4

La figure ci-dessous représente la répétition de cinq épreuves de Bernoulli où les deux issues sont S *(succès)* et E *(échec)*. Le nombre en indice sur le cinquième choix représente le nombre de succès réalisés dans le chemin choisi.



1. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4	5
Nombre de chemins associés						

2. On considère la même épreuve de Bernoulli, mais répétée six fois :

   a. Donner le nombre de chemins réalisant 4 succès lorsque l'on répète six fois une épreuve de Bernoulli *(on pourra compléter l'arbre de choix ou raisonner)*.

   b. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de chemins associés							

3. *Loi binomiale*

E.5 Soit $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 15 et 0,35. C'est-à-dire : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(15\,;0{,}35)$

Déterminer la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=7)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

E.6 Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

Déterminer la probabilité exacte pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie, puis sa valeur arrondie au centième.

E.7 Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise *(on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence)*.

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Proposition : La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est : $3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^7$

E.8 Une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à $]0\,;1[$.

Sans justification, indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

- **Proposition 1 :** si $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)=8\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ alors $p=\dfrac{2}{3}$.
- **Proposition 2 :** si $p=\dfrac{1}{5}$ alors $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)=\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$.

4. *Loi binomiale et évènements complémentaires*

E.9 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètre $n=15$ et $p=0{,}63$.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux suivants :

   a. $\dbinom{15}{13}$ b. $\dbinom{15}{14}$ c. $\dbinom{15}{15}$

2. Déterminer la valeur exacte des probabilités suivantes, puis arrondie à 10^{-4} près :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=13)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=14)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=15)$

3. En déduire la valeur, arrondie à 10^{-4} près, de la probabilité de l'événement $\{\mathcal{X}\leqslant12\}$.

E.10 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 6 et 0,3.

1. Déterminer la valeur exacte des probabilités suivantes, puis arrondies au centième près :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$

2. En déduire la valeur, approchée millième près, de : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant2)$

E.11 Lors d'une épidémie chez des bovins, un test de cette maladie est mis en place. Une étude est faite sur ce troupeau et la probabilité que le test soit positif sur un animal de ce troupeau est de 0,058.

On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$?
2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif? On donnera la valeur exacte et la valeur approchée au millième.

E.12 Un concours sportif est organisé, chaque année, pour relier deux villages le plus rapidement possible. Plusieurs moyens de déplacement sont possibles :
à vélo ; en roller ; à pied.

On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres. L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\dfrac{2}{3}$.

Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent "*non cycliste*". Donner également la valeur approchée au millième de cette probabilité.

E.13 **Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.**

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

1. On admet que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
   a. A : "*il n'y a aucun stylo avec un défaut*" ;
   b. B : "*il y a au moins un stylo avec un défaut*" ;
   c. C : "*il y a exactement deux stylos avec un défaut*".

5. *Loi binomiale et fonctions de répartition*

E.14 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètres 14 et 0,44 *($\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(14\,;0{,}44)$)*.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,0002	0,003	0,02	0,073	0,186	0,365	0,576	0,765

k	8	9	10	11	12	13	14
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,895	0,963	0,99	0,998	0,999	0,999	1

1. a. Déterminer la probabilité de l'événement $\{\mathcal{X}=5\}$.
   b. Donner la valeur de : $\mathcal{P}(\mathcal{X}=8)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$
2. Déterminer la valeur de la probabilité : $\mathcal{P}(\mathcal{X}>5)$
3. Répondre aux questions ci-dessous :
   a. Donner la probabilité que la variable $\mathcal{X}$ pour valeur au moins 7.
   b. Donner la probabilité que la variable $\mathcal{X}$ pour valeur au plus 7.
4. Déterminer les probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(3\leqslant\mathcal{X}\leqslant6)$ b. $\mathcal{P}(5\leqslant\mathcal{X}\leqslant10)$

6. *Loi binomiale avec calculatrice : valeurs ponctuelles*

E.15 Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 7 et 0,6. C'est-à-dire : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(7\,;0{,}6)$

À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous, avec des valeurs arrondies au millième, afin d'obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$								

7. *Loi binomiale avec calculatrice : valeurs cumulées*

E.16 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 20 et 0,2.

On répondra aux questions à l'aide de la calculatrice. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près :

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$
2. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant9)$

E.17 On suppose qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre $n=22$ et $p=0{,}37$.

À l'aide de la calculatrice et sans justification, donner la probabilité de $\mathcal{P}(3\leqslant\mathcal{X}\leqslant7)$ arrondie à 10^{-4} près.

E.18 Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes de thé vert chez un grossiste. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

Une étude réalisée sur les boites de thé vert du grossiste montre que 12 % des boîtes présentent des traces de pesticides dans leur thé.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à ce prélèvement de 10 boites, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides. On donne la valeur exacte et la valeur arrondie à 10^{-4}.
3. Donner, au millième près, la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

E.19 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre $n=5$ et $p=0{,}6$.

On arrondira les probabilités au millième près.

1. Donner la loi de la variable $\mathcal{X}$ sous la forme d'un tableau.
2. Déterminer les probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}>1)$

8. *Loi binomiale - problèmes*

E.20 On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites *(A, B et C)*, une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot "*BBAAC*" signifie que le candidat a répondu *B* aux première et deuxième questions, *A* aux troisième et quatrième questions et *C* à la cinquième question.

1. Combien y a-t-il de mots réponses possibles à ce questionnaire?
2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

   Calculer la probabilité des événements suivants :
   a. E : "*le candidat a exactement une réponse exacte.*".
   b. F : "*le candidat n'a aucune réponse exacte*".
   c. G : "*le mot-réponse du candidat est un palindrome*". *(On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, "BACAB" est un palindrome)*

E.21 Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b.

2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b.
Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

- A : "*la montre tirée présente le défaut a*" ;
- B : "*la montre tirée présente le défaut b*" ;
- C : "*la montre tirée ne présente aucun des deux défauts*" ;
- D : "*la montre tirée présente un et un seul des deux défauts*".

La probabilité de l'événement C est égale à 0,882.

1. Calculer la probabilité de l'événement D.
2. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres.

   On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

   Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b.

   On définit l'événement :
   E : "*quatre montres au moins n'ont aucun défaut*".

   Calculer la probabilité de l'événement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

E.22 Dans un établissement scolaire deux associations proposent des activités parascolaires aux élèves : l'association sportive et l'association artistique, une étude a porté sur l'inscription des élèves à chacune de ces deux associations. Voici une partie de ses résultats :

- 42 % des élèves se sont inscrits à l'association sportive ;
- 35 % des élèves se sont inscrits à l'association artistique ;
- 32 % des élèves possèdent une inscription aux deux associations.

1. On choisit au hasard un élève dans l'établissement. On considère les événements suivants :
   - S : *"l'élève est inscrit à l'association sportive"* ;
   - A : *"l'élève est inscrit à l'association artistique"* ;

   a. D'après les données de l'énoncé, donner la valeur des probabilités suivantes :
   $\mathcal{P}(S)$; $\mathcal{P}(A)$; $\mathcal{P}(S \cap A)$

   b. Déterminer la probabilité de l'événement :
   U : *"L'élève est inscrit dans au moins une des deux associations"*

   c. On considère l'événement :
   E : *"L'élève est inscrit dans une et une seule de ces deux associations"*.
   Montrer que la probabilité de cet événement vérifie :
   $\mathcal{P}(E) = 0{,}13$

2. On forme des groupes de 32 élèves de cet établissement. On suppose que le choix des élèves s'effectue indépendant des élèves précédemment choisi et ne modifie pas la probabilité du groupe.

   On s'intéresse à la variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre d'élèves d'un tel groupe possédant l'inscription à une et une seule de ces associations.

   a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire $\mathcal{X}$?

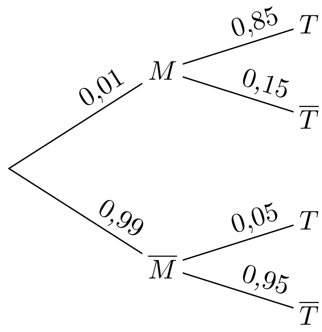
   b. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins deux élèves de ce groupe qui aient une et une seule inscription dans une de ces deux associations.
   On arrondira les résultats à 10^{-4} près.

E.23 Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux.

On note les événements :

- M : *"l'animal est porteur de la maladie"* ;
- T : *"le test est positif"*.

Voici l'arbre de probabilité obtenu après l'étude du cheptel :



1. Un animal est choisi au hasard.

   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

   b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

2. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$? Justifier.

   b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ? On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième près.

3. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

   a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ associant à un animal le coût à engager.

   b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

9. *Espérance d'un loi binomiale*

E.24 On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

1. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire $\mathcal{X}$?
2. Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2)$.
3. Donner l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

E.25 Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude. Soit $\mathcal{X}_i$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ième trajet et la valeur 0 sinon. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire définie par :
$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 + \cdots + \mathcal{X}_{40}$

1. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.
2. Dans cette partie, on suppose que : $p=\dfrac{1}{20}$.
   a. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$.
   b. Calculer les probabilités :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$
   c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

E.26 Une usine produit des sacs. On suppose que la probabilité *(arrondie au centième)* qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité de l'événement "*au moins un sac est défectueux*" ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

E.27 Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été, il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.

Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\dfrac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.

Une somme de 1 crédit *(la monnaie locale)* est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.

Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.

Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13^{e} groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédit à l'association.

Les probabilités demandées seront arrondies au 100^{e} le plus proche.

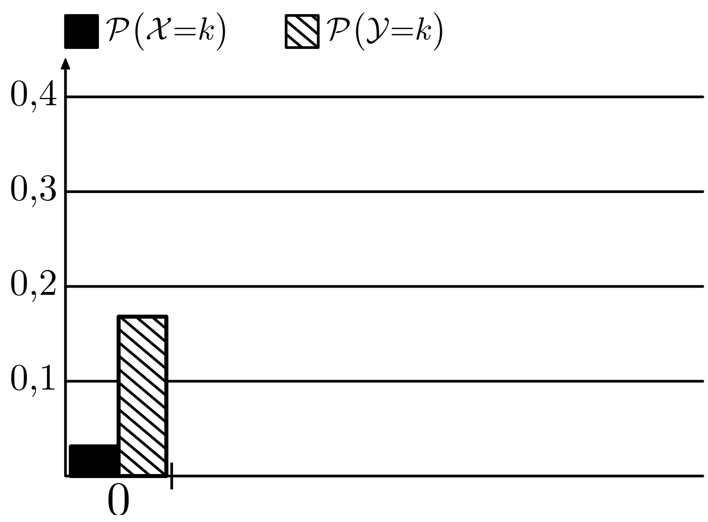
1. Quelle est la probabilité P_{13} qu'un jour donné, il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?
2. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.
   Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.
3. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :
   $$\left(\sum_{k=0}^{13} k\cdot\binom{13}{k}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}\right) - 2\cdot P_{13}$$
   Calculer ce gain.
4. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ?

10. *Répartition de la distribution*

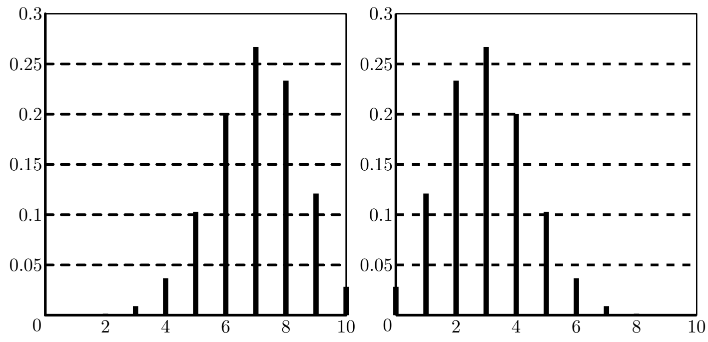
E.28
1. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,5$.

   Dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
2. On considère la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,3$.

   Dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.
3. Dans le graphique ci-dessous, compléter les diagrammes en barre représentant la loi de chacun de ces variables aléatoires :



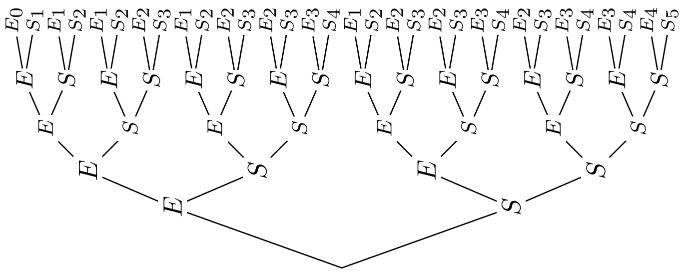
E.29 Des deux représentations ci-dessous, laquelle représente une loi binomiale de paramètre $n=10$ et $p=0{,}3$:



11. *Rappels : loi binomiale*

E.30

La figure ci-dessous représente la répétition de cinq épreuves de Bernoulli où les deux issues sont S *(succès)* et E *(échec)*. Le nombre en indice sur le cinquième choix représente le nombre de succès réalisés dans le chemin choisi.



1. Compléter le tableau ci-dessous :

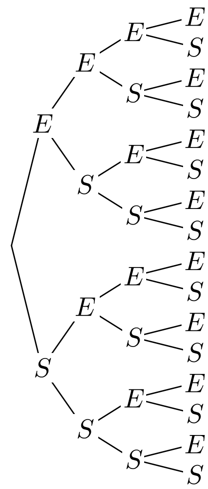
Nombre de succès	0	1	2	3	4	5
Nombre de chemins associés						

2. On considère la même épreuve de Bernoulli, mais répétée six fois :
   a. Donner le nombre de chemins réalisant 4 succès lorsque l'on répète six fois une épreuve de Bernoulli *(on pourra compléter l'arbre de choix ou raisonner)*.
   b. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de chemins associés							

E.31

La figure ci-contre représente la répétition de quatre épreuves de Bernoulli où les deux issues sont S *(succès)* et E *(échec)*. On suppose connu les probabilités suivantes : $\mathcal{P}(S)=\dfrac{1}{3}$; $\mathcal{P}(E)=\dfrac{2}{3}$



On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui compte le nombre de succès réalisés après la répétition de ces quatre épreuves de Bernoulli.

1. a. Combien d'événements élémentaires comprend l'événement $\{\mathcal{X}=3\}$?
   b. Soit $\omega\in\{\mathcal{X}=3\}$, montrer que : $\mathcal{P}(\omega)=\dfrac{2}{81}$
   c. Justifier que : $\mathcal{P}(\mathcal{X}=3)=\dfrac{8}{81}$
2. a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
   b. Compléter le tableau ci-dessous afin de donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

x					
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$					

E.32 On répondra aux questions suivantes en utilisant la calculatrice et on arrondira les résultats au centième près :

1. Donner la valeur des coefficients binomiaux suivants :
   a. $\dbinom{15}{3}$ b. $\dbinom{24}{3}$ c. $\dbinom{54}{12}$ d. $\dbinom{51}{51}$
2. Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire telle que $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(15\,;0{,}3)$. Donner les valeurs approchées au centième des probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=8)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=12)$
3. Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire telle que $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(52\,;0{,}3)$. Donner les valeurs approchées au centième des probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant9)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant15)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant23)$

E.33 On répète 10 fois et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0{,}3$.

À cette expérience, on associe la variable $\mathcal{X}$ qui associe à chaque issue de cette expérience le nombre de succès.

1. Déterminer les probabilités suivantes :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$
2. Déterminer la probabilité de l'événement $\{\mathcal{X}\geqslant 3\}$.

Indication : On arrondira les résultats au millième près.

E.34 Un examen est basé sur un QCM comportant 5 questions où chaque question propose quatre choix de réponse parmi lesquelles une seule réponse est correcte.

Un élève décide de compléter de manière aléatoire et indépendante chacune des questions du questionnaire.

1. Quelle est la probabilité de répondre correctement à une question?

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de réponses correctes contenues dans le formulaire rempli.

2. Déterminer les probabilités suivantes arrondies au millième près :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 3)$
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité, arrondie au millième, que l'élève ait au plus 2 réponses justes.

E.35 Dans un jeu, on convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire et la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.
Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

1. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.
2. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.
3. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5
$\mathcal{P}(\mathcal{X}<k)$	0,0091	0,0637	0,2110	0,4467	0,6943

k	6	7	8	9	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}<k)$	0,8725	0,9616	0,9922	0,9990	0,9999

Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'événement : "*la personne gagne au moins N parties*".

À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet événement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

12. *Probabilités conditionnelles et loi binomiale*

E.36 Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.

Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.
   a. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.
   b. Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.
2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.

   Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.

E.37 Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

- **Question 1**

A et B sont deux événements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient :
$\mathcal{P}(A)=\frac{1}{2}$; $\mathcal{P}_A(B)=\frac{3}{10}$; $\mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{1}{10}$

Affirmation :
La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisée et égale à $\frac{1}{4}$.

- **Question 2**

Une urne A contient deux boules bleues et trois boules rouges et une urne B contient une boule bleue et trois boules rouges.
Les boules sont considérées indiscernables au toucher.
Un jeu consiste à tirer au hasard une boule dans l'urne A, si la boule est bleue le jeu est gagné. Dans le cas, contraire le joueur tire une boule dans l'urne B et gagne si la boule est bleue.
Les boules tirées sont remises dans leur urne respective à la fin du jeu.

On s'intéresse à une personne jouant dix fois d'affiler et de manière indépendante à ce jeu.

Affirmation :

La probabilité que le joueur gagne au moins 2 fois est inférieure à 0,3.

13. *Arbres non symétriques*

E.38 *Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.*

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :
   - A_1 l'événement "*la personne est absente lors du premier appel*" ;
   - R_1 l'événement "*la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel*".

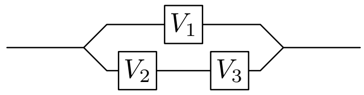
   Quelle est la probabilité de R_1?
2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.

   Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

   On note :
   - A_2 l'événement "*la personne est absente lors du second appel*" ;
   - R_2 l'événement "*la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel*" ;
   - R l'événement "*la personne accepte de répondre au questionnaire*".

   Montrer que la probabilité de R est 0,176 *(On pourra utiliser un arbre)*.
3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait eu lieu lors du premier appel?

E.39 Avec trois vannes identiques V_1, V_2 et V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre.
Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.

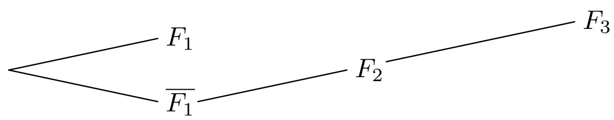


On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6 000 heures. On note :

- F_1 l'événement : "*la vanne V_1 est en état de marche après 6 000 heures*".
- F_2 l'événement : "*la vanne V_2 est en état de marche après 6 000 heures*".
- F_3 l'événement : "*la vanne V_3 est en état de marche après 6 000 heures*".
- E l'événement : "*le circuit est en état de marche après 6 000 heures*".

On admet que les événements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à 0,3.

1. L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation.
   Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.



2. Démontrer que : $\mathcal{P}(E)=0{,}363$.
3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6 000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment-là. Arrondir au millième.

14. *Probabilite : binomiale*

E.40 Si $\mathcal{X}$ est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et $\dfrac{1}{3}$ alors :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{100}$$

E.41 Une animalerie possède des alevins de poissons rares. La probabilité d'acheter un alevin et que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

E.42 Une urne contient des boules indiscernables au toucher. 20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges. Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise *(après chaque tirage la boule est remise dans l'urne)* :

1. Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.
2. Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieur ou égale à 0,99.

E.43 Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieur à 0,999.

E.44 Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 50$, on définit les événements suivants :

- A : "*le jardinier a choisi le lot* 1" ;
- B : "*le jardinier a choisi le lot* 2" ;
- J_n : "*le jardinier obtient n tulipes jaunes*".

1. Montrer que : $\mathcal{P}_B(J_n) = \binom{50}{n} \cdot 2^{-50}$
2. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.
3. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que J_n est réalisé. Établir que :
$$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$$
4. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geqslant 0{,}9$?
Comment peut-on interpréter ce résultat?

15. *Exercices non-classés*

E.45 Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.

Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,049 4.
2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.
   a. Définir la loi de $\mathcal{X}$.
   b. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$. Pour l'entreprise, quelle interprétation peut-on faire de cette espérance?